数理解析研究所講究録 1328 巻 2003 年 1-41

福田拓生先生御還暦献呈

自由分解の幾何学的構成法とその特異点論への応用

埼玉大学理学部 福井 敏純 (Toshizumi Fukui)

写像の特異点の軌道の閉包を記述するのは，重要で基本的な問題であるが困難な問題である．本稿では，次の公式を正則写像 $f:(\mathbf{C}^n,0)\to(\mathbf{C}^p,0)$ に一般化することを動機とした論文 [2] の解説である．

福田-石川，Gaffney-Mond の公式

正則写像 $f:(\mathbf{C}^2,0)\to(\mathbf{C}^2,0)$, $(x,y)\mapsto(p(x,y),q(x,y))$, に対し，

$$c(f)=\dim_{\mathbf{C}}\mathbf{C}\{x,y\}\Big/\Big\langle J,\frac{\partial(J,p)}{\partial(x,y)},\frac{\partial(J,q)}{\partial(x,y)}\Big\rangle,\quad \text{但し}\quad J=\frac{\partial(p,q)}{\partial(x,y)}$$

が有限と仮定する．すると f を微小摂動したとき現れるカスプ (A_2 特異点) の個数は $c(f)$ 個である．

$c(f)$ の定義の分母に現れたイデアルは，2-ジェット空間内のカスプ特異点の軌道の閉包を記述している．(正確には，2-ジェット空間内のカスプ特異点の軌道の閉包を記述するイデアルを f の 2 ジェット断面で引き戻したものである．) これは，写像を特異点集合に制限して，さらにその特異点集合を考える，いわゆる Thom-Boardman 多様体 $\Sigma^{1,1}$ の閉包と捉えることもでき，ここに現れたイデアルは，実際ヤコビアンを繰り返しとることで定義されている．

ヤコビアンを繰り返しとれば何が定義されるかは Morin が論文 [6] で考察した．本稿では，例えば，この Morin が定義したイデアル，これは写像のヤコビ行列の階数について条件なしにいつでも定義出来る，について，微小摂動で現れる対応する特異点の個数を記述する，上のような代数的公式が成り立つかどうかに興味がある．これは，このイデアルの定義する空間と，ジェット断面の像との局所交点数を考えていることになっていて，そのためには考えているイデアルがいつ完全か (いいかえると，そのイデアルがいつ Cohen-Macaulay 空間を定義するか)? を知ることが大切となる ([1, Proposition 7.1, Example 7.1.3])．

変数を成分とする行列の，あるサイズの小行列式の生成するイデアルの定義する空間を行列式空間 (determinantal variety) と言うが，これが Cohen-Macaulay であることは良く知られている．その証明にはそのイデアルの自由分解 (シチジー) を構成すればよい．(シチジの長さが余次元と等しい事を見れば良い．この場合，Cohen-Macaulay 性より強い条件であ有理特異点であることもわかってしまう．) 自由分解を構成するのには，自由分解の幾何学構成法が強力な手法で，これは最近出版された [8] に解説されている，本稿はこの手法のである Weyman との共著の仕事 [2] の解説であるが，そこでやっていることは，一言てば，Thom-Boardman 多様体の閉包に台を持つ複体の構成である．例えば Thom-Boar 多様体の特異点解消が具体的にわかればそこに台を持つ複体を崩壊させて，Thom-Boa

多様体の閉包に台を持つ複体が構成できる．それが所要の自由分解となっている場合がしばしばあるのである．これは実はそこに台を持つ加群の（または複体の），一般線形群の表現論を使った表示と捉えることが出来る．Thom-Boardman 多様体などの特異点集合は，源と像の座標変換で不変であるから，当然線形座標変換でも不変であり，その特異点集合を記述するイデアルやそこに台を持つ加群を，一般線形群の表現として記述しようと言うアイデアは，当然すぎる程当然なものであるが，本稿はある程度それを実行した形になっている．

本稿の構成は次のようである．最初の 6 つの節で，一般線形群の表現論の知識を復習する．7-9 節で，自由分解の幾何学的構成法の概要を説明する．11 節で行列式空間の自由分解 (Lascoux 複体) を解説する．12 節では対称行列の小行列式の生成するイデアルについて簡単に解説を与えた．

13 節以降が [2] の解説であるが，[2] の定理を全て収録する事はしなかった．むしろいくつか個別の場合に限って，自由分解の幾何学的構成法がどのように応用されるのかを解説するように心がけた．[2] の繰り返しよりも，[2] でスキップしたいくつかの細部を解説した方が良いと思ったからである．

13-15 節では Morin のイデアルを考察する．特に $\Delta^{i,\cdots,i,j}$ が Σ^i に沿って完全であることの証明のアウトラインを与える．16 節では Ronga ([7]) による $\Sigma^{i,j}$ の特異点解消を考察し，得られる複体について解説する．特に $I=(n-p+1,1),(1,1)$ のときの丁寧な解説を与える．最後に Morin のイデアルを若干変形したもの，考えるべき階数条件を簡単化したもの，を考察する．

特異点論の研究者にとって馴染みのないと思われる部分は出来るだけ解説するように心がけたが，筆者の能力では証明は完全には与え切れなかった．一般線形群の表現論については [5], [3], [4] 等を見て戴きたい． 自由分解の幾何学的構成法は [8] にいろんな応用が載っている．これらは本稿の対応部分の原文献でもあるので，併せて参照して戴ければと思う．

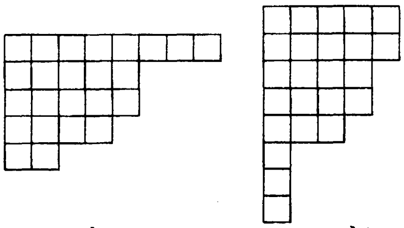
この原稿を，福田拓生先生の御還暦に，献呈致します．筆者の怠慢で，原稿提出が遅れてしまい，鹿児島大学の大本亨氏はじめ多くの方に御迷惑をお掛けしたことを，深くお詫び致します．

1　分割

整数の n-tuple で $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ で $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0$ をみたすものを $d=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$ の**分割** (partition) という．d を λ の**重み** (weight) といい $|\lambda|$ で表す．$\lg(\lambda):=\max\{i:\lambda_i\neq 0\}$ を λ の**長さ** (length) という．．

分割 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ に対し第 1 行に λ_1 個の箱 (正方形) を，第 2 行に λ_2 個の箱を，… n 行に λ_n 個の箱を並べて出来た図形を**Young 図形**といい $[\lambda]$ で表す．

Young 図形 $[\lambda]$ を転置 (行と列の入れ換え) して得られる Young 図形に対応する分割を λ の双役といい $\lambda^\sim$ で表す．



λ $\lambda^{\sim}$

Young 図形の各箱に番号 $\{1,\ldots,n\}$ を重複を許して入れたものを**充填 Young 図形**または Young 図形の**充填** (filling) といい $T=T_\lambda$ と書く．$T_\lambda(i,j)$ で i 行 j 列目に割り当てられた数字を表す．Young 図形 λ に対しその充填の作り方は，全部で d^n 通りある．

Young 図形の充填で，番号 $1,\ldots,d(=|\lambda|)$ が丁度 1 つずつ入ったものを**番号つき Young 図形**または Young 図形の**番号付け** (numbering) という．Young 図形 λ に対しその番号付けの作り方は，$d!$ 通りある．

充填 Young 図形 T_λ で次の性質をみたすものを**順充填** (tableau) という．

(i) $T_\lambda(i,j)\le T_\lambda(i,j+1)$, $j=1,\ldots,\lambda_i$.

(ii) $T_\lambda(i,j)<T_\lambda(i+1,j)$, $j=1,\ldots,n$.

2 対称多項式

n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ は自然に多項式環 $\mathbf{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ に作用するがこの作用に対する不変式全体 $\mathbf{Z}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ は対称多項式全体のなす環でなる．

$$E(t)=\prod_{i=1}^{n}(1+x_it)=\sum_{d=0}^{n}E_dt^d$$

で定まる多項式 $E_d=E_d(x_1,\ldots,x_n)$ を d 次の**基本対称多項式**という．$E_1,\ldots,E_n$ は代数的に独立で，$\mathbf{Z}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}=\mathbf{Z}[E_1,\ldots,E_n]$ である．

$$H(t)=\prod_{i=1}^{n}(1-x_it)^{-1}=\sum_{d=0}^{\infty}H_dt^d,$$

で定まる多項式 $H_d=H_d(x_1,\ldots,x_n)$ を d 次の**完全対称多項式**という．$H_1,\ldots,H_n$ は代数的に独立で，$\mathbf{Z}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}=\mathbf{Z}[H_1,\ldots,H_n]$ である．

$$S_\lambda(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\det\left({x_i}^{\lambda_j+n-j}\right)_{1\le i,j\le n}}{\det\left({x_i}^{n-j}\right)_{1\le i,j\le n}}$$

を **Schur 多項式** という．Schur 多項式達 $\{S_\lambda(x_1,\ldots,x_n):\lg(\lambda)=n\}$ は不変式環 $\mathbf{Z}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ の $\mathbf{Z}$-基底をなす．

定理 2.1. $S_\lambda=\det(H_{\lambda_i+j-i})_{1\le i,j\le n}=\det(E_{\lambda^{\sim}_i+j-i})_{1\le i,j\le n}$.

写像 $\omega:\mathbf{Z}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}\to\mathbf{Z}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ を $\omega(E_i)=H_i$, $i=1,\ldots,n$ で定義する．

定理 2.2. ω^2 は恒等写像. $\omega(S_\lambda) = S_{\lambda^\sim}$.

Schur 多項式 S_λ を明示的に表す公式として次が知られている.

定理 2.3. $S_\lambda = \sum_a k_{\lambda a} x^a, \quad x^a = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$.
但し $k_{\lambda a}$ は λ の Young 図形に a_1 個の 1, a_2 個の 2, ..., a_n 個の n を水平方向には非減少に，垂直方向には増加するように入れる入れ方の総数.

3 群の線形表現

V を複素数体 $\mathbf{C}$ 上の有限次元線形空間とする.

群 G から $\mathrm{GL}(V)$ への群準同型 $G \to \mathrm{GL}(V)$ を群 G の線形空間 V への **(線形) 表現**という．二つの表現 $G \to \mathrm{GL}(V_1)$, $G \to \mathrm{GL}(V_2)$ が同型であるとは同型 $V_1 \to V_2$ をがあってこの同型が誘導する同型 $\mathrm{GL}(V_1) \to \mathrm{GL}(V_2)$ と $G \to \mathrm{GL}(V_1)$ との合成が $G \to \mathrm{GL}(V_2)$ となる時をいう.

しばしば群 G の元 g に対し その $G \to \mathrm{GL}(V)$ による像を同じ記号 g で表す.

群 G の V への表現がある時 $g \cdot v = g(v)$ と定義すれば V を 左 G-加群と見なす事ができる．逆に左 G-加群を G の V への表現とみなす事も可能である．よって表現 $G \to \mathrm{GL}(V)$ のことを写像を明示せずに，左 G-加群 V または 群 G の表現 V といった言い方をする.

群 G の V への表現がある時，$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbf{C})$ (V の双対空間) への表現 $G \to \mathrm{GL}(V^*)$ を $g \mapsto$ (g^{-1}の表す $\mathrm{GL}(V)$ の元の転置) $\in GL(V^*)$ で定義する.

群 G の線形空間 V_1, V_2 への表現がある時，その直和 $V_1 \oplus V_2$ およびテンソル積 $V_1 \otimes V_2$ への表現をそれぞれ

$$g : v_1 \oplus v_2 \mapsto g(v_1) \oplus g(v_2), \quad g : v_1 \otimes v_2 \mapsto g(v_1) \otimes g(v_2)$$

で定義する.

群 G の線形表現 $G \to \mathrm{GL}(V)$ に対しその**指標**(character) χ_V を

$$\chi_V : G \to \mathbf{C}, \quad \chi_V(g) = \mathrm{trace}\{g : V \to V\}, \quad g \in G$$

で定義する．指標は群 G の共役類上の関数と考えることも出来る.

定理 3.1. $\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$, $\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_{V_1} \cdot \chi_{V_2}$, $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$.

群 G の表現 V に対して，群 G の作用で不変な V の部分空間 W があれば表現 $G \to \mathrm{GL}(V)$ は部分表現 $G \to \mathrm{GL}(W)$ を定義する．表現 $G \to \mathrm{GL}(V)$ が自明でない部分表現を持たないときその表現は**既約**であるという.

G のすべての線形表現が既約な表現の直和と同型になる時，群 G は**完全可約**であるという．有限群，コンパクト群，線形群 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$ などは完全可約である.

4 Schur 加群

V を複素数体 $\mathbf{C}$ 上の有限次元線形空間とする．本節では $\mathrm{GL}(V)$ の線形表現を問題にする．

番号つき Young 図形 $T=T_\lambda$ には d 次対称群 $\mathfrak{S}_d$ が自然に作用するが**Young の対称子**と呼ばれる群環 $\mathbf{C}\mathfrak{S}_d := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}\mathbf{C}\sigma$ の元 c_T を次で定義する．

$$\begin{aligned} c_T &= b_T a_T, \quad \text{但し} \\ a_T &= \sum\{\sigma : \sigma\in\mathfrak{S}_d \text{ は } T=T_\lambda \text{ の行を保つ}\}, \\ b_T &= \sum\{\mathrm{sgn}(\sigma)\sigma : \sigma\in\mathfrak{S}_d \text{ は } T=T_\lambda \text{ の列を保つ}\}. \end{aligned}$$

d 次対称群 $\mathfrak{S}_d$ は

$$\sigma\cdot(v_1\otimes\cdots\otimes v_d) = v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(d)}, \quad \sigma\in\mathfrak{S}_d$$

で $V^{\otimes d}$ に作用するが，これは $V^{\otimes d}$ の $\mathrm{GL}(V)$ の作用と交換可能である．群環 $\mathbf{C}\mathfrak{S}_d$ は

$$\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} c_\sigma\sigma\right)\cdot(v_1\otimes\cdots\otimes v_d) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} c_\sigma\sigma\cdot(v_1\otimes\cdots\otimes v_d), \quad c_\sigma\in\mathbf{C}$$

で自然に $V^{\otimes d}$ に作用するが，その作用を用いて

$$v_1\otimes\cdots\otimes v_d \mapsto c_T\cdot(v_1\otimes\cdots\otimes v_d)$$

で定義される写像

$$c_T : V^{\otimes d} \to V^{\otimes d}$$

の像を $\mathbb{S}_T V$ と書く．c_T の像 $\mathbb{S}_T V$ の同型類は λ の番号づけ $T=T_\lambda$ によらず，分割 λ のみによって定まるので，その同型類を $\mathbb{S}_\lambda V$ と書く．これを **Schur 加群**という．ちなみに c_T による作用は特別な場合として，対称化作用素 ($\lambda=(d)$ のとき)

$$s_d : V^{\otimes d} \ni v_1\otimes\cdots\otimes v_d \mapsto \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(d)} \in V^{\otimes d},$$

および交代化作用素 ($\lambda=(1^d)=(1,1,\ldots,1)$ (d 個) のとき)

$$a_d : V^{\otimes d} \ni v_1\otimes\cdots\otimes v_d \mapsto \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} \mathrm{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(d)} \in V^{\otimes d}$$

を含んでいるので次が成り立つ．

(i) $\mathbb{S}_d V = \mathrm{Im}\, s_d = \mathrm{Sym}^d V$.

(ii) $\mathbb{S}_{(1^d)} V = \mathrm{Im}\, a_d = \bigwedge^d V$, ただし $(1^d)=(1,1,\ldots,1)$ (d 個).

c_T は次の性質を持つ．

定理 4.1. $c_T^2 = n_\lambda c_T$. 但し $n_\lambda = d!/\dim_{\mathbf{C}}\mathbb{S}_\lambda V$.

また $\mu = \lambda^{\sim}$ と書くとき，$\mathbb{S}_\lambda V$ は次の写像の像と解釈することも出来る．

$$\bigotimes_i (\wedge^{\mu_i} V) \subset \bigotimes_i (V^{\otimes \mu_i}) = V^{\otimes d} = \bigotimes_j (V^{\otimes \lambda_j}) \to \bigotimes_j (\mathrm{Sym}^{\lambda_j} V)$$

$$\bigotimes_i (\mathrm{Sym}^{\lambda_i} V) \subset \bigotimes_i (V^{\otimes \lambda_i}) = V^{\otimes d} = \bigotimes_j (V^{\otimes \mu_j}) \to \bigotimes_j (\wedge^{\mu_j} V)$$

定理 4.2. $\mathbb{S}_\lambda V$ は既約な左 GL(V)-加群 (GL(V) の既約表現) になる．またすべての既約な左 GL(V)-加群はどれかの $\mathbb{S}_\lambda V$ に同型．さらに

(i) $\lg(\lambda) > \dim V$ ならば $\mathbb{S}_\lambda V = 0$.

(ii) $g \in GL(V)$ の固有値を $x_1, \ldots, x_n$ とすると $\chi_{\mathbb{S}_\lambda V}(g) = S_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$.

特に $n = \dim V$ のとき表現空間の次元については次がわかる．

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbb{S}_\lambda V = S_\lambda(1, \ldots, 1) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}$$

多項式環 $\mathbf{C}[Z] = \mathbf{C}[Z_{1,1}, Z_{1,2}, \ldots, Z_{d,n}]$, $Z_{i,j}$, $1 \le i \le d$, $1 \le j \le n$, は不定元，に Schur 加群 $\mathbb{S}_\lambda V$ を実現しよう．まず次の行列式を考える．

$$\delta_{i_1, \ldots, i_k} = \begin{vmatrix} Z_{1,i_1} & \cdots & Z_{1,i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{k,i_1} & \cdots & Z_{k,i_k} \end{vmatrix}, \quad 1 \le i_1, \ldots, i_k \le n.$$

充填 Young 図形 $T = T_\lambda$ に対し

$$\delta_T = \prod_{j=1}^{\lambda_1} \delta_{T(1,j), T(2,j), T(\mu_j, j)}$$

とおく．ここで μ_j は λ の j 列目の長さで $T(i,j) = T_\lambda(i,j)$ である．T' を T のある列の二つの要素を入れ換えて得られる充填とすると

$$\delta_{T'} = -\delta_T$$

が成り立つ．また $p \times p$ 行列 A, B と $1 \le j_1 < \cdots < j_k \le p$ に対して Sylvester の法則

$$|A||B| = \sum_I |A_I||B_I|, \quad I = \{i_1, \ldots, i_k\}$$

が成り立つ．但し A の第 $i_1, \ldots, i_k$ 列と B の第 $j_1, \ldots, j_k$ 列を (i_1 列と j_1 列を入れ換え，i_2 列と j_2 列を入れ換えという具合にして) 入れ換えて得られる行列を A_I, B_I と書いている．これより $q \le p$ と $1 \le t_1 < \cdots < t_k \le q$ に対し

$$\delta_{i_1, \ldots, i_p} \delta_{j_1, \ldots, j_q} = \sum_S \delta_{i_1, \ldots, i_p; S} \delta_{j_1, \ldots, j_q; S}, \quad S = \{s_1, \ldots, s_k\} \subset \{1, \ldots, q\},$$

但し $\delta_{i_1,\dots,i_p;S}$ は行列式 $\delta_{i_1,\dots,i_p}$ の第 s_i 列を (Z_{*,t_i}) に変えたもので，$\delta_{i_1,\dots,i_q;S}$ は 行列式 $\delta_{i_1,\dots,i_q}$ の第 t_i 列を (Z_{*,s_i}) に変えたものである．T のある 2 列に $i_1,\dots,i_p$ と $j_1,\dots,j_q$ が並ぶ場合を考えれば，これより δ_T の間の恒等式が導かれる．すなわち充填 T の 2 つの列に $i_1,\dots,i_p$ と $j_1,\dots,j_q$, $q\le p$, が並んでいるとする．$j_1,\dots,j_q$ のうち k 個 $j_{t_1},\dots,j_{t_k}$, $1\le t_1<\dots<t_k\le q$, を固定する．$S=\{s_1,\dots,s_k\}$, $1\le s_1<\dots<s_k\le p$, に対し j_{t_l} と i_{s_l}, $l=1,\dots,k$, を入れ換えて出来る充填 $T(S)$ を考える．このとき次が成立する．

$$\delta_T=\sum_S \delta_{T(S)}.$$

さて，

$$g\cdot Z_{i,j}=\sum_{k=1}^n Z_{i,k}g_{k,j},\quad g=(g_{i,j})\in \mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$$

で $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ の $\mathbf{C}[Z]$ への作用を定める．これは $\mathbf{C}[Z]$ を $d\times n$ 行列 $A=(Z_{i,j})$ を不定元とする関数環 $\mathbf{C}[Z]=\{f:\mathrm{Mat}(n,\mathbf{C})\to\mathbf{C},(Z_{i,j})\to f(Z_{i,j})\}$ とみるとき

$$(g\cdot f)(A)=f(A\cdot g),\quad f\in\mathbf{C}[Z],\ g\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$$

で定まる作用である．とくに，

$$g\cdot\delta_{j_1,\dots,j_p}=\sum_{1\le i_1,\dots,i_p\le n} g_{i_1,j_1}\cdots g_{i_p,j_p}\delta_{i_1,\dots,i_p},$$

なので

$$g\cdot\delta_T=\sum(g_{S,T}\delta_S:S\ \text{は}\ \lambda\ \text{の充填}),\quad g_{S,T}=\prod_{i,j}g_{S(i,j),T(i,j)}$$

となる．よって，$\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ の $\mathbf{C}[Z]$ への作用は

$$\sum\{\mathbf{C}\delta_T:T\ \text{は Young 図形}\ \lambda\ \text{の充填}\}\subset\mathbf{C}[Z]$$

を不変にし，これは $\mathbb{S}_\lambda V$ と線形表現として同型である事が示される．とくに

$$\{\delta_T:T\ \text{は}\ \lambda\ \text{の順充填}\}$$

は $\mathbb{S}_\lambda V$ の $\mathbf{C}$ ベクトル空間としての基底になる．ベクトル空間 V の基底 $e_1,\dots,e_n$ を一つ固定する．このとき Young 図形 λ の第 i 行第 j 列の箱に V の元 $v_{i,j}$ を入れたものを Schur 加群の元とみなすことができる．すなわち写像

$$\beta:V^{\otimes d}\to\mathbb{S}_\lambda V$$

を定まる．これは多重線形写像であり，$v_{i,j}=\sum_{k=1}^n c_{i,j;k}e_k$, $c_{i,j;k}\in\mathbf{C}$, と書くとき

$$\beta((v_{i,j})_{i,j})=\sum_T c_T\delta_T,\quad c_T=\prod_{i,j}c_{i,j;T(i,j)}$$

となる．またこの構成は関手的である．すなわち $\mathbf{C}$ 加群の準同型 $\varphi : V \to V'$ があれば，自然な準同型

$$\varphi_\lambda : \mathbb{S}_\lambda V \longrightarrow \mathbb{S}_\lambda V'$$

が定まる．これは $\{e'_j\}$ を V' の基底として，$\varphi(e_i) = \sum_j b_{i,j} e'_j$ と書くとき

$$\varphi_\lambda(\delta_T) = \sum_S b_{T,S}\delta_S, \quad b_{T,S} = \prod_{i,j} b_{T(i,j),S(i,j)}$$

で表される．

5 Littlewood-Richardsonの法則

まず Littlewood-Richardson の定数 $c^\nu_{\lambda\mu}$ について説明する．まず μ の Young 図形 $[\mu]$ の第1行の各箱に番号1を，第2行の各箱に番号2を，... という具合にして $[\mu]$ の各箱すべてに番号をふる．次に Young 図形 $[\mu]$ の各箱をばらして番号の若い順に λ の Young 図形 $[\lambda]$ にくっつけていく．この時次の条件を満たすようにつけていく．

(i) 同じ列に同じ番号が来ない．

(ii) 第1行の番号を右から順に読んで，続いて第2行の番号を右から順に読んで，... という具合にしてできる有限数列 $\{a_i\}$ が次の性質を満たす．

$$\#\{j \le k : a_j = i\} \le \#\{j \le k : a_j = i-1\}, \quad 2 \le i \le \lg(\mu), 1 \le k \le |\mu|.$$

最後に番号を消して Young 図形 $[\nu]$ を得る．このようにしてできる分割 ν の個数を $c^\nu_{\lambda\mu}$ で表す．

定理 5.1 (Littlewood-Richardson の法則). $\mathbb{S}_\lambda V \otimes \mathbb{S}_\mu V = \bigoplus_\nu c^\nu_{\lambda\mu}\mathbb{S}_\nu V$.

特別の場合として 次の Pieri の公式を得る．

$$\mathbb{S}_\lambda V \otimes \mathrm{Sym}^m V = \bigoplus_\nu \mathbb{S}_\nu V, \quad \mathbb{S}_\lambda V \otimes \bigwedge^m V = \bigoplus_\nu \mathbb{S}_\nu V$$

ただし 右辺の ν は次の条件を満たす: $[\nu]$ は $[\lambda]$ に左式の場合は各列に，右式の場合は各行に，高々1つの箱のみで全部で m 個の箱をつけて得られる Young 図形．

$\mathrm{GL}(V_1)$ の表現 W_1 と $\mathrm{GL}(V_2)$ の表現 W_2 が与えられると，$W_1 \oplus W_2$ と $W_1 \otimes W_2$ は $\mathrm{GL}(V_1) \times \mathrm{GL}(V_2)$ の表現と見る事ができる．$\mathrm{GL}(V_1) \times \mathrm{GL}(V_2)$ の表現として次の式が成り立つ．

$$\mathbb{S}_\lambda(V_1 \oplus V_2) = \bigoplus_{\mu,\nu:|\lambda|=|\mu|+|\nu|} c^\lambda_{\mu\nu}\mathbb{S}_\mu V_1 \otimes \mathbb{S}_\nu V_2.$$

$$\mathbb{S}_\lambda(V_1 \otimes V_2) = \bigoplus_{\mu,\nu:|\mu|=|\nu|=|\lambda|} b^\lambda_{\mu\nu}\mathbb{S}_\mu V_1 \otimes \mathbb{S}_\nu V_2.$$

ここで $c_{\mu\nu}^{\lambda}$ は Littlewood-Richardson の定数. 2 番目の公式では右辺は $d := |\lambda|$ の分割達 μ, ν すべてにわたって和をとり $b_{\mu\nu}^{\lambda}$ は次で与えられる定数.

$$b_{\mu\nu}^{\lambda} = \sum_{\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_d)} \left(\frac{\omega_\lambda(\mathbf{i})\omega_\mu(\mathbf{i})\omega_\nu(\mathbf{i})}{i_1!i_2!\cdots i_d!1^{i_1}2^{i_2}\cdots d^{i_d}} : \sum_{q=1}^{d} qi_q = d \right)$$

但し $\omega_\lambda(\mathbf{i})$ は多項式 $\prod_{q=1}^{d}(x_1^q+\cdots+x_n^q)^{i_q}$ の x^λ の係数で次の形に表せる.

$$\omega_\lambda(\mathbf{i}) = \sum_{r_{pq}} \left(\prod_{q=1}^{d} \frac{i_q!}{r_{1q}!r_{2q}!\cdots r_{nq}!} : i_q = \sum_{a=1}^{n} r_{aq}, \lambda_p = \sum_{b=1}^{d} br_{pb} \right)$$

特別の場合として次の公式がある.

$$\mathrm{Sym}^m(V_1 \oplus V_2) = \bigoplus_{a+b=m} \mathrm{Sym}^a V_1 \otimes \mathrm{Sym}^b V_2, \qquad \bigwedge^m(V_1 \oplus V_2) = \bigoplus_{a+b=m} \bigwedge^a V_1 \otimes \bigwedge^b V_2,$$

$$\mathrm{Sym}^m(V_1 \otimes V_2) = \bigoplus_{\lambda:|\lambda|=m} \mathbb{S}_\lambda V_1 \otimes \mathbb{S}_\lambda V_2, \qquad \bigwedge^m(V_1 \otimes V_2) = \bigoplus_{\lambda:|\lambda|=m} \mathbb{S}_\lambda V_1 \otimes \mathbb{S}_{\lambda^\sim} V_2.$$

6 プレチズム

$\mathrm{GL}(V)$ の W への表現 $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(W)$ と $\mathrm{GL}(W)$ の W_1 への表現 $\mathrm{GL}(W) \to \mathrm{GL}(W_1)$ があれば, 自然に $\mathrm{GL}(V)$ の W_1 への表現 $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(W_1)$ が定まる. これを既約分解するのが次のプレチズム (Plethysm) 公式である.

定理 6.1 (プレチズム公式).

$$\mathbb{S}_\lambda(\mathbb{S}_\mu V) = \bigoplus_{\nu:|\nu|=|\lambda|\cdot|\mu|} a_{\lambda\mu}^{\nu} \mathbb{S}_\nu V.$$

ここで $a_{\lambda\mu}^{\nu}$ は非負整数.

これは対称式の言葉に翻訳すると次のようになる.

$f \in \mathbf{Z}[y_1,\ldots,y_m]^{\mathfrak{S}_m}$, $g \in \mathbf{Z}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ をとる.

$$g(x) = \sum u_\alpha x^\alpha$$

とあらわしたとき

$$\prod_{j=1}^{m}(1+\overline{y}_j t) = \prod_{\alpha}(1+x^\alpha t)^{u_\alpha}$$

であったとする. このとき $\overline{y}_i$ 達は $x_1,\ldots,x_n$ の単項式で書けている.

$$f \circ g(x) := f(\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_m)$$

で対称式 $f \circ g$ を定義する. このとき $f = S_\lambda$, $g = S_\mu$ とおいて対称式 $f \circ g = S_\lambda \circ S_\mu$ を次の形に書いておく.

$$S_\lambda \circ S_\mu = \sum_{\nu:|\nu|=|\lambda|\cdot|\mu|} a_{\lambda\mu}^{\nu} S_\nu$$

これは表現の規約分解に対応するので $a^{\nu}_{\lambda\mu}$ は非負整数でなければならない.
一般の $a^{\nu}_{\lambda\mu}$ を明示的に表す公式は知られていないが特別の場合として次が成立する.

$$\mathrm{Sym}^m(\mathrm{Sym}^2 V) = \bigoplus_{\nu\in E(2m)} \mathbb{S}_\nu V, \qquad \mathrm{Sym}^m(\bigwedge^2 V) = \bigoplus_{\nu\in E(2m)} \mathbb{S}_{\nu^\sim} V.$$

ただし $E(2m) = \{\nu = (\nu_1,\dots,\nu_r) \mid |\nu| = 2m, \nu_i \text{は偶数}\}$.

$$\bigwedge^m(\mathrm{Sym}^2 V) = \bigoplus_{\nu\in P_{r,1}(2m)} \mathbb{S}_{\nu^\sim} V, \qquad \bigwedge^m(\bigwedge^2 V) = \bigoplus_{\nu\in P_{r,1}(2m)} \mathbb{S}_\nu V.$$

ただし $P_{r,t}(2m)$ は次で定義される分割の集合である.

$$P_{r,t}(2m) = \{\nu = (a_1,\dots,a_r \mid a_1+t,\dots,a_r+t) \mid |\nu| = 2m\}$$

ここで $(a_1,\dots,a_r \mid b_1,\dots,b_r)$ は対角線に r 個箱を並べて，第 i 行には対角線上の箱の後ろに a_i 個の箱を並べ，第 i 列には対角線上の箱の下に b_i 個の箱を並べて得られる Young 図形に対応する 分割 を表す.
次もプレチズム公式の特別な場合である.

$$\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^m V) = \bigoplus_{j:\text{偶数}} \mathbb{S}_{(2m-j,j)} V, \qquad \bigwedge^2(\mathrm{Sym}^m V) = \bigoplus_{j:\text{奇数}} \mathbb{S}_{(2m-j,j)} V,$$

$$\mathrm{Sym}^2(\bigwedge^m V) = \bigoplus_{j:\text{偶数}} \mathbb{S}_{(m+j,m-j)} V, \qquad \bigwedge^2(\bigwedge^m V) = \bigoplus_{j:\text{奇数}} \mathbb{S}_{(m+j,m-j)} V.$$

7 複体に関する補題

A を次数付き可換環で $A_0 = k$, k は体，なるものとする.
補題 7.1. 有限生成次数付自由 A 加群の複体 $G_\bullet$ に対し，最小複体 $G'_\bullet$ と完全複体 $G''_\bullet$ が存在し $G_\bullet = G'_\bullet \oplus G''_\bullet$. さらに $G'_\bullet = H_i(G_\bullet \otimes_A k) \otimes_k A$ となる.

証明. $g_i = \operatorname{rank} G_i$ と置き，$G_i = \sum_{1\le j\le g_i} A(-e_{j,i})$ と書いておく. 微分 $d_i : G_i \to G_{i-1}$ を行列表示し (k,j) 成分が，次数 $e_{j,i} - e_{k,i-1}$ の斉次元であるようにしておく. G_i の分解 $G_i = B_i \oplus U_i \oplus B'_i$ で微分写像 $d_i : G_i \to G_{i-1}$ が次のように表せるものがあれば $G'_i = U_i$, $G''_i = B_i \oplus B'_i$ とおけばよい.

$$d_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & d'_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

ある微分射 $d_m : G_m \to G_{m-1}$ を固定する. G_m, G_{m-1} の基底の斉次変換により

$$d_m = \begin{pmatrix} d'_m & 0 \\ 0 & d''_m \end{pmatrix}$$

d'_m は最小かつ d''_m は単位行列とできる．これより $G_m = W_m \oplus V_m$, $G_{m-1} = W_{m-1} \oplus V_{m-1}$ と分割できて $d'_m : W_m \to W_{m-1}$ は最小, $d''_m : V_m \to V_{m-1}$ は同型, $d_m = d'_m \oplus d''_m$ と出来る．

同様にして $d_{m+1} : G_{m+1} \to G_m$ も分解しよう．$\{G_\bullet\}$ は複体なので d_{m+1} の V_m に対応する成分は 0 である．よって $d_{m+1} : G_{m+1} \to W_m$ と考えても良い．この写像を標準型に直すと $G_{m+1} = W_{m+1} \oplus V_{m+1}$, $W_m = U_m \oplus B_m$ と分解できて d_{m+1} は最小射 $W_{m+1} \to U_m$ と，恒等射 $V_{m+1} \to B_m$ との直和となる．ここで $B'_m = V_m$，$B'_{m+1} = V_{m+1}$, $B_{m-1} = V_m$ とおく．

$i > j$ なるすべての i に対し分割(1) が出来ていて $G_j = B_j \oplus W_j$ と分割されているとする．B_j は d_{j+1} の像に含まれるから，$B_j \subset \operatorname{Ker} d_j$ となり $d_j : W_j \to G_{j-1}$ と思ってよい．これを標準型に直すと $W_j = U_j \oplus B'_j$, $G_{j-1} = B_{j-1} \oplus W_{j-1}$ と分割できて d_j は最小写像 $U_j \to W_{j-1}$ と恒等写像 $B'_j \to B_{j-1}$ の直和.

同様に $i < j$ なるすべての i に対し分割(1) が出来ていて $G_j = W_j \oplus B'_j$ と分割されているとする．$\operatorname{Im} d_{j+1} \subset W_j$ となり $d_{j+1} : G_{j+1} \to W_j$ と思ってよい．これを標準型に直すと $G_{j1} = W_{j+1} \oplus B'_{j+1}$, $W_j = B_j \oplus U_j$ と分割できて d_{j+1} は最小写像 $W_{j+1} \to U_j$ と恒等写像 $B'_{j+1} \to B_j$ の直和.

以上の議論を組み合わせれば証明が終る． □

補題 7.2. 次数付 A 加群の複体 $M_\bullet$ が $M_i = 0$, $i < i_0$, をみたすとする．このとき，次数付 A 加群の最小複体 $G_\bullet$ と擬同型 $G_\bullet \to M_\bullet$ が存在する．

証明. $Z_i = \operatorname{Ker}\{M_i \to M_{i-1}\}$, $B_i = \operatorname{Im}\{M_{i+1} \to M_i\}$ とおくと次の完全列がある．

$$0 \to B_i \to Z_i \to H_i \to 0, \quad 0 \to Z_i \to M_i \to B_{i-1} \to 0.$$

M_i, B_i，Z_i, H_i の自由分解をそれぞれ $\mathcal{M}_i$, $\mathcal{B}_i$，$\mathcal{Z}_i$, $\mathcal{H}_i$ とすると，複体の完全列

$$0 \to \mathcal{B}_i \to \mathcal{Z}_i \to \mathcal{H}_i \to 0, \quad 0 \to \mathcal{Z}_i \to \mathcal{M}_i \to \mathcal{B}_{i-1} \to 0$$

が存在する．写像 η_i を

$$\eta_i : \mathcal{M}_i \to \mathcal{B}_{i-1} \to \mathcal{Z}_{i-1} \to \mathcal{M}_{i-1}$$

とすると $\eta_i \circ \eta_{i-1} = 0$ である．二重複体

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{M}_i \xrightarrow{\eta_i} \mathcal{M}_{i-1} \xrightarrow{\eta_{i-1}} \mathcal{M}_{i-2} \longrightarrow \cdots$$

の全複体を $G_\bullet$ とすれば，$G_\bullet$ から $M_\bullet$ への自然な写像 ϕ がある．二重複体のスペクトル系列を考えれば ϕ は擬同型であることがわかる．

この複体 $\{G_\bullet\}$ に前補題を適用して，$\{G'_\bullet\}$ を取ればこれが求める最小複体となる． □

補題 7.3. 次数付き自由 A 加群の次数付き二重複体 $\mathbf{F}$

$$\begin{tikzcd}
 & \uparrow & \uparrow & \\
\cdots \arrow[r] & F_{i-1,j} \arrow[r, "d_h"] & F_{i-1,j-1} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & F_{i,j} \arrow[u, "d_v"] \arrow[r, "d_h"] & F^i_{i,j-1} \arrow[u, "d_v"'] \arrow[r] & \cdots \\
 & \uparrow & \uparrow &
\end{tikzcd}$$

で $F_{i,j}=0,\ i\gg 0,$ を満たすものを考える．縦方向の d_v は分解し横方向は極小複体と仮定する．$d_h{}^2=0,\ d_v{}^2=0,\ d_hd_v+d_vd_h=0$ に注意する．このとき，次を満たす $F_{i,j}$ の部分加群 $G_{i,j},\ H_{i,j}$ が存在する．

- $F_{i,j}=G_{i,j}\oplus d_v(G_{i+1,j})\oplus H_{i,j}$.
- $\mathrm{Ker}\{d_v : F_{i,j}\to F_{i-1,j}\}=d_v(G_{i+1,j})\oplus H_{i,j}$.
- $d_v|G_{i+1,j} : G_{i+1,j}\to d_v(G_{i+1,j})$ は同型．

$s : F_{i,j}\to H_{i,j}$ を上の直和分解から決まる自然な射影，$p : F_{i,j}\to G_{i+1,j}$ を上の直和分解から決まる自然な射影 $F_{i,j}\to d_v(G_{i+1,j})$ に同型 $G_{i+1,j}\to d_v(G_{i+1,j})$ の逆を合成したものとする．

$$H_k=\oplus_{i+j=k}H_{i,j},\quad d : H_k\to H_{k-1},\quad d|H_{i,j}:=\sum_{\ell\geq 0}s(d_hp)^\ell d_h : H_{i,j}\to H_{i+j-1}$$

と置くと，$\{H_\bullet\}$ は $\{\mathbf{F}\}$ の全複体とホモトピックな複体である．

証明. まず $s(d_hp)^\ell d_h : H_{i,j}\to H_{i+\ell,j-\ell-1}$ に注意する．$F_{i,j}=0,\ i\gg 0,$ なので，これは有限和である．

$d_t=d_h+d_v$ を $\{F_{i,j}\}$ の全複体の微分とする．縦方向の複体は分解するので，$G_{i,j},\ H_{i,j}$ が存在して F は

$$G=\oplus G_{i,j},\quad d_v(G),\quad H=\oplus H_{i,j}$$

の直和に分解される．よって $F_{i,j}$ の任意の元は $g'+d_t(g)+h,\ g'\in G_{i,j},\ g\in G_{i+1,j},\ h\in H_{i,j}$ の形に表される．この元は $G+d_t(G)+H$ を法として $d_h(g)\in F_{i+1,j-1}$ と書ける．$F_{i,j}=0,$ $i\gg 0,$ なので，i に関する帰納法により，

$$F:=\oplus F_{i,j}=G+d_t(G)+H$$

がわかる．

$$g'\in G_\ell=\oplus_{i+j=\ell}G_{i,j},\quad g\in G_{\ell+1}=\oplus_{i+j=\ell}G_{i+1,j},\quad h\in H_\ell=\oplus_{i+j=\ell}H_{i,j}$$

に対し $g'+d_t(g)+h=0$ を仮定して $g'=g=h=0$ を示す．$g=\sum_{k=a}^b g_{k+1,\ell-k},\ g_{s,t}\in G_{s,t},$ と書く．$(d_tg)_{b,\ell-b}=(d_vg)_{b,\ell-b}=d_v(g_{b+1,\ell-b})$．仮定より，これは零で $g_{b+1,\ell-b}=0$ となる．よって $b-a$ の帰納法より証明が終る．これより

$$F:=\oplus F_{i,j}=G\oplus d_t(G)\oplus H$$

で d_t は G から $d_t(G)$ への同型である．

$\mathbf{G}:=G\oplus d_t(G)$ は $\mathbf{F}$ の部分二重複体である．$d_t : G\to d_t(G)$ は同型なので，全複体 $\mathrm{tot}(\mathbf{G})$ は分解する完全列である．よって，全複体 $\mathrm{tot}(\mathbf{F})$ は $\mathrm{tot}(\mathbf{F})/\mathrm{tot}(\mathbf{G})$ にホモトピー同値である．この複体の加群は $H=\oplus H_{i,j}$ に同型である．

微分を計算するため $h \in H_{i,j}$ に対し，$d_t h \equiv h' \pmod{G + d_t G}$ となる $h' \in H$ を具体的に表そう．

$$d_t h = d_h h \equiv s(d_h h) + (d_t p) d_h h \pmod{G}$$

であるが

$$d_t p = d_h p \equiv s(d_t p) + d_t p(d_h p) \pmod{G + d_t(G)}$$

である．これを繰り返して，$d_t p = d_h p$ と $F_{i,j} = 0, i \gg 0$, を用いれば，

$$d_t h \equiv \sum_{\ell \geq 0} s(d_h p)^\ell d_h h \pmod{G + d_t(G)}$$

を得る． □

8 代数幾何学から

$A = \bigoplus_{k\geq 0} A_k$ を次数付き可換環とし $A_+ = \bigoplus_{k>0} A_k$ とおくとこれは A のイデアルである．

次数付き A 加群 $M = \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} M_k$ と $n \in \mathbf{Z}$ に対し，$M(n) := \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} M_{k+n}$ とおく．特に $A(n)$ は A 加群 $\bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} A_{k+n}$ の事を表す．

次数付き A 加群 M, M' に対し，ある d が存在して $\oplus_{k\geq d} M_k = \oplus_{k\geq d} M'_k$ となるとき $M \approx M'$ と定義すると，これは同値関係である．有限生成加群と同値になる加群を擬有限生成加群という．

次数付き A 加群 M に対し $M^\sim$ を $P = \mathrm{Proj}(A)$ 上の対応する層とする．これは A_+ を含まない A の斉次素イデアル $\mathfrak{p} \in P = \mathrm{Proj}(A)$ での茎が，$A - \mathfrak{p}$ の斉次元全体がなす積閉集合での M の局所化の次数 0 の部分，となる層である．$A(n)$ の層化 $A(n)^\sim$ を $\mathcal{O}_P(n)$ と表す．

$P = \mathrm{Proj}(A)$ 上の層 $\mathcal{F}$ に対し

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{k\geq 0} \Gamma(P, \mathcal{F}(n)), \quad \mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_P(n)$$

とおく．

定理 8.1. A は A_0 上 A_1 で生成されていると仮定する．関手 $^\sim$ と 関手 Γ_* は，擬有限生成次数付き A 加群を同値関係 $\approx$ で割って得られる圏と，連接 $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}$ 加群のなす圏の間の，圏として同値を定める．

証明. R.Hartshorne: Algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, 1977 の II 章 5 節 Ex.5.9 を参照． □

9 自由分解の幾何学的構成

P を射影多様体とし，V を有限次元複素線形空間 $\mathbf{C}^N$ とする．自然な射影 $p : P \times V \to P$ から決まる P 上の自明なベクトル束を ξ と書く．ベクトル束はその切断の作る局所自由層

と同一視する．第2成分への射影を $q: P \times V \to V$ と書く．ζ を ξ の部分束, Z を ζ の全空間とする．η を ξ の ζ による商束とする．

$$\begin{array}{ccccc} Z & \subset & P \times V & \xrightarrow{p} & P \\ \downarrow & & \downarrow q & & \\ X & \subset & V & & \end{array}$$

すると次のような P 上のベクトル束の完全列がある:

$$0 \to \zeta \to \xi \to \eta \to 0.$$

これの双対をとると

$$0 \to \eta^* \to \xi^* \to \zeta^* \to 0$$

を得る．同一視 $\mathcal{O}_{P\times V} = \mathrm{Sym}\,\xi^* = \mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_P}\,\xi^*$ の下で Z の $P \times V$ のなかでの定義イデアル $\mathcal{I}_Z$ は $\mathcal{O}_{P\times V}$ 上 $p^*\eta^*$ (の断面) で生成されるから

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_{P\times V} = \mathrm{Sym}\,\xi^* \longrightarrow \mathcal{O}_Z = \mathrm{Sym}\,\zeta^* \longrightarrow 0$$

を得る．これは $\mathcal{O}_{P\times V}$ 加群の完全列であるが，$\mathcal{O}_P$ 加群の完全列 $\mathrm{Sym}\,\xi^* \to \mathrm{Sym}\,\zeta^* \to 0$ から誘導されたものである．$\mathcal{I}_Z$ の生成元 ($p^*\eta^*$ の中にある) を用いてできる次の Koszul 複体を考える．

$$K_\bullet : 0 \to \bigwedge^{\mathrm{rank}\,\eta} p^*\eta^* \to \cdots \to \bigwedge^2 p^*\eta^* \to p^*\eta^* \to \mathcal{O}_{P\times V} = R \otimes A$$

これの微分写像は N 変数の多項式環 $A = \mathcal{O}_V = \mathcal{O}_{\mathbf{C}^N}$ の次数 1 の元で書かれる．この $\mathcal{O}_{P\times V}$ 上の複体を写像 q_* で崩壊させて $\mathcal{O}_V$ 上の複体にするのが目標である．

P 上の ベクトル束 $\mathcal{G}$ に対し次で定義される次数付自由 A 加群を考える．

$$F_s(\mathcal{G}) = \bigoplus_{t\geq 0} \mathrm{H}^t\Big(P, (\bigwedge^{s+t} \eta^*) \otimes \mathcal{G}\Big) \otimes_{\mathbf{C}} A(-s-t)$$

最後の $(-s-t)$ は 次数付 A-加群と見た時の次数のずらしを表す．また $\mathcal{G}$ として自明な直線束をとる時や，文脈から $\mathcal{G}$ が明らかな時は，$F_s(\mathcal{G})$ を単に F_s と略記する．

定理 9.1. 次数 0 の微分写像 $d_s(\mathcal{G}) : F_s(\mathcal{G}) \to F_{s-1}(\mathcal{G})$ が存在して $F_s(\mathcal{G})$ は次数付自由 A 加群の複体となり

$$H_{-s}(F_\bullet(\mathcal{G})) = R^s q_*(\mathcal{O}_Z \otimes p^*\mathcal{G}) = H^s(Z, \mathcal{O}_Z \otimes p^*\mathcal{G}) = H^s(P, \mathrm{Sym}(\zeta^* \otimes \mathcal{G})).$$

とくに $H_s(F_\bullet(\mathcal{G})) = 0, s > 0$. さらに $d_s(\mathcal{G})$ は A の正の同次元で書かれる．更に詳しく言えば

$$d_s : F_s(\mathcal{G}) \to F_{s-1}(\mathcal{G})$$

の成分

$$(d_s)^{(t,t')} : H^t(P, \wedge^{s+t}(\eta^* \otimes \mathcal{G})) \otimes \mathcal{O}_V(-s-t) \to H^{t'}(P, \wedge^{s+t'-1}(\eta^* \otimes \mathcal{G})) \otimes \mathcal{O}_V(-s-t'+1)$$

は次数 $t - t' + 1$ の同次元で与えられる．とくに $t < t'$ ならば $(d_s)^{(t,t')}$ は零写像.

証明. 次の2つの次数付き可換環を考える.

$$R = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \Gamma(P, \mathcal{O}_P(n)), \quad A = \mathcal{O}_V = \operatorname{Sym} V^* = \bigoplus_{n \geq 0} \operatorname{Sym}^n V^*$$

補題 9.2. $\ell = \operatorname{rank} \eta$ とする. $P_s = (\bigwedge^s p^*\eta^*) \otimes p^*\mathcal{G}$, $s = 0, 1, \ldots, \ell$, と置くとき複体

$$0 \to P_\ell \to P_{\ell-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$$

の $A \otimes R$ 加群としての q_* 非輪状解消 (すなわち $R^k q_* P_{s,t} = 0$, $k > 0$, で縦方向は完全):

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & P_{\ell,-2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_{2,-2} & \longrightarrow & P_{1,-2} & \longrightarrow & P_{0,-2} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & P_{\ell,-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_{2,-1} & \longrightarrow & P_{1,-1} & \longrightarrow & P_{0,-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & P_{\ell,0} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_{2,0} & \longrightarrow & P_{1,0} & \longrightarrow & P_{0,0} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & P_{\ell} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_{2} & \longrightarrow & P_{1} & \longrightarrow & P_{0} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

が存在する.

補題の証明. P を射影空間に埋め込んでおく. その埋め込みが定める豊富な層を $\mathcal{O}_P(1)$ と書く時, (必要ならば Veronese 埋込を合成して) $H^k(P, \mathcal{O}_P(n)) = 0$, $k > 0$, $n > 0$, と仮定して一般性を失わない.

$$C_{-s} = \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma\left(P, (\bigwedge^s p^*\eta) \otimes p^*\mathcal{G}^* \otimes \mathcal{O}_P(n)\right) \otimes A(s)$$

とおく. これは $K_\bullet$ に $p^*\mathcal{G}$ をテンソルして双対をとったものから誘導される写像で複体となる. C_t の各成分の加群から, 次数つき R 加群としての正でない次数の成分をカットして得られる, $\{C_s\}$ と同値な複体を $\{\widehat{C}_s\}$ と書く. 複体 $\{\widehat{C}_s\}$ の双次数付き $R \otimes A$-加群として

の極小自由分解

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 & \widehat{C}_{-\ell,2} \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & \widehat{C}_{-2,2} \arrow[l] \arrow[d] & \widehat{C}_{-1,2} \arrow[l] \arrow[d] & \widehat{C}_{0,2} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
0 & \widehat{C}_{-\ell,1} \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & \widehat{C}_{-2,1} \arrow[l] \arrow[d] & \widehat{C}_{-1,1} \arrow[l] \arrow[d] & \widehat{C}_{0,1} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
0 & \widehat{C}_{-\ell,0} \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & \widehat{C}_{-2,0} \arrow[l] \arrow[d] & \widehat{C}_{-1,0} \arrow[l] \arrow[d] & \widehat{C}_{0,0} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
0 & \widehat{C}_{-\ell} \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & \widehat{C}_{-2} \arrow[l] \arrow[d] & \widehat{C}_{-1} \arrow[l] \arrow[d] & \widehat{C}_{0} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
 & 0 & & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

をとる．縦の列は $\Gamma_*((\bigwedge^s \eta)\otimes\mathcal{G}^*)$ の R 加群としての Γ-非輪状解消に $\otimes A(s)$ を施して得られるとしてよく、$\widehat{C}_{i,j}$ の各成分は次数つき R 加群としては次数正の元で，生成されていると仮定できる．これを層化して双対をとったものを $\{P_{\bullet\bullet}\}$ と書く．定理8.1より，最下行は複体 $K_\bullet\otimes p^*\mathcal{G}$ と同型．よってこの複体はで $P_s=(\bigwedge^s p^*\eta^*)\otimes p^*\mathcal{G}$ となる．言い換えると右分解

$$0\to(\bigwedge^s p^*\eta^*)\otimes p^*\mathcal{G}\to P_{s,\bullet}(\mathcal{G}),\quad s=0,1,2,\dots$$

が構成できた．構成より各 $P_{s,t}=P_{s,t}(\mathcal{G})$ は $\mathcal{O}_P(j)\otimes A(s), j>0,$ の直和として表す事ができ，

$$
\begin{aligned}
R^k q_*(\mathcal{O}_P(j)\otimes A(s)) &= H^k(P\times V,\mathcal{O}_P(j)\otimes A(s))\\
&=\begin{cases}0 & k>0\\ \Gamma(P,\mathcal{O}_P(j))\otimes\Gamma(V,\mathcal{O}_V(s)) & k=0\end{cases}
\end{aligned}
$$

なので，各 $P_{s,t}$ は q_*-非輪状である． □

二重複体 $\{q_*P_{\bullet\bullet}\}$ の全複体を $\{G_n\}$ と書く．二重複体 $\{q_*P_{\bullet,\bullet}\}$ の作る次のスペクトル列を考える．

$${}_{\mathrm{hor}}E^1_{s,t}=H_s(\{q_*P_{\bullet,\bullet}\})\Longrightarrow H_{s+t}(G_\bullet)$$

各 $P_{s,t}$ が q_*-非輪状であることから，

$${}_{\mathrm{hor}}E^1_{s,t}=\begin{cases}\mathrm{Coker}\{q_*P_{1,t}\to q_*P_{0,t}\} & s=0,\ t\le 0\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

$$ {}_{\mathrm{hor}}E^2_{s,t} = \begin{cases} R^{-t}q_*(\mathcal{O}_Z \otimes p^*\mathcal{G}) & s = 0 \\ 0 & s \neq 0 \end{cases} $$

が得られ、スペクトル列 ${}_{\mathrm{hor}}E^r_{s,t}$ は E^2 退化で $H_{-t}(G_\bullet) = R^t q_*(\mathcal{O}_Z \otimes p^*\mathcal{G})$ を得た.

一方，補題7.1より

$$ G_n = F_n \oplus L_n, \quad \{F_n\}\text{ 最小複体}, \quad \{L_n\}\text{ 完全複体} $$

となり $F_n = H_n(G_\bullet \otimes \mathbf{C}) \otimes A$ とかける．ここで $\mathbf{C} = A/A_+$ と見なしている．$\otimes\mathbf{C}$ をすると $\{q_*P_{\bullet,\bullet}\}$ の水平方向は零写像になってしまうから

$$ H_n(G_\bullet \otimes \mathbf{C}) = \bigoplus_{s+t=n} H_t(q_*P_{s,\bullet} \otimes \mathbf{C}) = \bigoplus_{s+t=n} H^{-t}(P, (\bigwedge^s \eta^*) \otimes \mathcal{G}) $$

よって $F_n = \bigoplus_{a \geq 0} H^a(P, \bigwedge^{a+n} \eta^* \otimes \mathcal{G}) \otimes A(-a-n)$. □

系 9.3. もし $R^k q_*(\mathcal{O}_Z \otimes p^*\mathcal{G}) = 0\ (k > 0)$ ならば $\{F_s(\mathcal{G})\}$ は $q_*(\mathcal{O}_Z \otimes p^*\mathcal{G})$ の A 自由分解.

定理 9.4. $\Sigma = q(Z)$ とし, $q : Z \to \Sigma$ が双有理写像と仮定する.

(i) $q_*\mathcal{O}_Z$ は $\mathcal{O}_\Sigma$ の正規化.

(ii) $R^k q_*\mathcal{O}_Z = 0\ (k > 0)$ のとき, $q_*\mathcal{O}_Z$ の A 加群としての有限自由分解が上述の方法で得られる.

(iii) $R^k q_*\mathcal{O}_Z = 0\ (k > 0)$ で $F_0 = H^0(P, \eta) \otimes A = A$ のとき $\mathcal{O}_\Sigma$ の A 加群としての有限自由分解が上述の方法で得られる．とくに Σ は正規かつ有理特異点である.

注意 9.5. $\mathcal{G}_v$, $v = 0, 1, \ldots, m$, を P 上のベクトル束とし，$P \times V$ 上に複体

$$ 0 \to p^*\mathcal{G}_m \to \cdots \to p^*\mathcal{G}_1 \to p^*\mathcal{G}_0 \to 0 $$

があるとして、定理9.1の構成を適用することもできる．この場合二重複体は

$$ P_{s,t} = \bigoplus_{u+v=s} P_{u,t}(\mathcal{G}_v) $$

で，第 s 列は $\mathcal{G}_v$ 達の Γ 非輪状解消に $\otimes A(s-v)$ して得られ $P_{u,t}(\mathcal{G}_v)$ は $\mathcal{O}_P(j) \otimes A(s-v)$, $j > 0$, なるいくつかの加群の直和としてよい．二重複体 $\{q_*P_{\bullet,\bullet}\}$ の全複体を $G_\bullet$ を考察してみよう．二重複体 $\{q_*P_{\bullet,\bullet}\}$ に $\otimes\mathbf{C}$ すると水平方向は零写像になってしまうから

$$ H_n(G_\bullet \otimes \mathbf{C}) = \bigoplus_{s+t=n} H^{-t}(q_*P_{s,\bullet} \otimes \mathbf{C}) $$

となる．よって s を固定して，二重複体 $\{q_*P_{s-v,t}(\mathcal{G}_v) \otimes \mathbf{C}\}_{v,t}$ の次のスペクトル列を追跡すれば $H_n(G_\bullet \otimes \mathbf{C})$ が計算できる.

$$ {}_{\mathrm{vert}}E^1_{v,t} = R^{-t}q_*((\bigwedge^{s-v} p^*\eta^*) \otimes p^*\mathcal{G}_v) \Longrightarrow H_{v+t}(q_*P_{s,\bullet} \otimes \mathbf{C}) $$

実際にこの方法で自由分解を構成する際，次の Bott の定理が有効である．

E を n 次元複素線形空間，$\mathrm{Grass}(r,E)$ を Grassmann 多様体，$\mathcal{E}$ を $\mathrm{Grass}(r,E)\times E \to \mathrm{Grass}(r,E)$ で決まる自明なベクトル束，

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{E} \to \mathcal{Q} \to 0$$

を $\mathrm{Grass}(r,E)$ 上の同語反復列 (tautological sequence) とする．

定理 9.6 (Bott の定理). 分割 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_{n-r})$ に対し，$\mathrm{Grass}(n-r,E)$ 上のベクトル束 $\mathbb{S}_\alpha\mathcal{Q}\otimes\mathbb{S}_\beta\mathcal{K}$ を考える $\lambda=(\alpha,\beta)$, $\rho=(n,n-1,\dots,1)$ とおく．

(i) $\lambda+\rho$ に 同じ要素が現れるとき，

$$H^k(\mathrm{Grass}(n-r,E),\mathbb{S}_\alpha\mathcal{Q}\otimes\mathbb{S}_\beta\mathcal{K})=0,\quad k\geq 0.$$

(ii) $\lambda+\rho$ に 同じ要素が現れないとき，$\lambda+\rho$ に現れる要素を大きい順に並べかえて得られる分割 $\sigma(\lambda+\rho)$ を考える．$\sigma^\bullet(\lambda)=\sigma(\lambda+\rho)-\rho$ とおく．$\lambda+\rho$ から $\sigma(\lambda+\rho)$ を得るのに必要な隣接する数字の入れ換えの最小数を $l(\sigma)$ と書く．

$$H^k(\mathrm{Grass}(n-r,E),\mathbb{S}_\alpha\mathcal{Q}\otimes\mathbb{S}_\beta\mathcal{K})=\begin{cases}0 & k\neq l(\sigma)\text{ のとき,}\\ \mathbb{S}_{\sigma^\bullet(\lambda)}E & k=l(\sigma)\text{ のとき.}\end{cases}$$

系 9.7. $\mathrm{Grass}(n-r,E)=\mathrm{Grass}(r,E^*)$ で

$$0\to\mathcal{Q}^*\to\mathcal{E}^*\to\mathcal{K}^*\to 0$$

は $\mathrm{Grass}(r,E^*)$ の同語反復列だから

(i) $\lambda+\rho$ に 同じ要素が現れるとき，

$$H^k(\mathrm{Grass}(n-r,E),\mathbb{S}_\alpha\mathcal{K}^*\otimes\mathbb{S}_\beta\mathcal{Q}^*)=0,\quad k\geq 0.$$

(ii) $\lambda+\rho$ に 同じ要素が現れないとき，

$$H^k(\mathrm{Grass}(n-r,E),\mathbb{S}_\alpha\mathcal{K}^*\otimes\mathbb{S}_\beta\mathcal{Q}^*)=\begin{cases}0 & k\neq l(\sigma)\text{ のとき,}\\ \mathbb{S}_{\sigma^\bullet(\lambda)}E^* & k=l(\sigma)\text{ のとき.}\end{cases}$$

10 対称代数としての多項式環およびジェット空間

V を n 次元複素ベクトル空間，V^* を V 上の $\mathbf{C}$-線形写像とする．すると $\mathrm{Sym}\,V^*=\bigoplus_{d\geq 0}\mathrm{Sym}^d V^*$ は V 上の複素多項式のなす環 $\mathbf{C}[x_1,\dots,x_n]$ と同型である．これは $V=\mathbf{C}^n$ の座標環とみなす事ができる．

全く同様にして代数多様体上の複素ベクトル束 $E \to M$ があたえられたとき，$\mathcal{E}$ を E の断面の作る層とすれば $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}}\,\mathcal{E}^*$ は ベクトル束の全空間 E の座標環とみなす事ができる.

$\mathbf{C}^n$, $\mathbf{C}^p$ の接束を $T\mathbf{C}^n, T\mathbf{C}^p$ とかくことにする．$\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p$ 上のベクトル束 J_k を

$$J_k = \mathrm{Hom}(\mathrm{Sym}^k T\mathbf{C}^n, T\mathbf{C}^p) = \mathrm{Sym}^k T^*\mathbf{C}^n \otimes T\mathbf{C}^p$$

で定義し, $J^k = \bigoplus_{l=1}^k J_l$ を k-jet 束という．ジェット空間のファイバー方向の座標を $\{Z^j_{i_1,\dots,i_l} \mid 1 \le i_1 \le \cdots \le i_l \le n, 1 \le l \le k\ ;\ 1 \le j \le p\}$ とすれば, $\mathcal{O}$ を底空間の座標環としたとき, $\mathcal{O}_{J_k} = \mathcal{O}[Z^j_{i_1,\dots,i_k}]$ がジェット空間の座標環であるが、これは次のようにあらわされる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{J^k} &= \mathrm{Sym}((\oplus_{l=1}^k J_l)^*) = \mathrm{Sym}(\oplus_{l=1}^k J_l^*) \\
&= \mathrm{Sym}\left(\oplus_{l=1}^k \mathrm{Sym}^l T\mathbf{C}^n \otimes T^*\mathbf{C}^p\right) \\
&= \bigoplus_{m_1,\dots,m_k} \bigotimes_{l=1}^k \mathrm{Sym}^{m_l}\left(\mathrm{Sym}^l T\mathbf{C}^n \otimes T^*\mathbf{C}^p\right) \\
&= \bigoplus_{m_1,\dots,m_k} \bigotimes_{l=1}^k \bigoplus_{\lambda_l:|\lambda_l|=m_l} \left(\mathbb{S}_{\lambda_l} \mathrm{Sym}^l T\mathbf{C}^n \otimes \mathbb{S}_{\lambda_l} T^*\mathbf{C}^p\right) \\
&= \bigoplus_{\lambda_1,\dots,\lambda_k} \left(\bigotimes_{l=1}^k \mathbb{S}_{\lambda_l} \mathrm{Sym}^l T\mathbf{C}^n\right) \otimes \left(\bigotimes_{l=1}^k \mathbb{S}_{\lambda_l} T^*\mathbf{C}^p\right)
\end{aligned}$$

これは座標環 $\mathcal{O}_{J^k}$ の多重次数 $(m_1,\dots,m_k)$ による分解を与えている．また右辺を既約分解すれば $\mathbb{S}_\alpha T\mathbf{C}^n \otimes \mathbb{S}_\beta T^*\mathbf{C}^p$ が右辺に埋め込めるかどうかを調べる事が出来る.

座標変換の群 $\mathcal{A} = \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^n, 0) \times \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^p, 0)$ が自然に J^k に作用するが，これは J^k の座標環 $\mathcal{O}_{J^k}$ への群 $\mathcal{A}$ の作用を誘導する．そこで群 $\mathcal{A}$ の作用で不変な $\mathcal{O}_{J^k}$ のイデアル $\mathcal{I}$ をとる．このイデアルの元を $j^k f(0)$ とする．f の各成分を定数倍してもそのジェットは同じイデアルに属する．このことは $\mathcal{I}$ が斉次イデアルであることを意味する．また源の座標変換 $(x_1,\dots,x_n) \mapsto (cx_1,\dots,cx_n)$, $c \neq 0$, を合成してもそのジェットの属するイデアルは変わらない．このことは変数 $Z^j_{i_1,\dots,i_l}$ に重み ℓ を与えても $\mathcal{I}$ は斉次であることを意味する．$\mathcal{I}$ は座標変換 $\mathcal{A} = \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^n, 0) \times \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^p, 0)$ で不変だから，特に $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C}) \times \mathrm{GL}(p, \mathbf{C})$ で不変である．したがって次の問題に答えることが重要と思われる.

問題: $\mathcal{I}$ の斉次生成元を Schur 加群の言葉で表せ.

11 Lascoux 複体: $\mathcal{O}_{\overline{\Sigma}^i}$ の自由分解の構成

定理 9.1 と Bott の定理を応用して Lascoux 複体の構成を説明する．これは以下の構成で $E = T\mathbf{C}^n, F = T\mathbf{C}^p$ (または $E = T^*\mathbf{C}^p, F = T^*\mathbf{C}^n$) としたとき 1-jet space $\mathrm{Hom}(T\mathbf{C}^n, T\mathbf{C}^p)$ 内の Thom-Boardman 多様体 Σ^i の Zariski 閉包 $\overline{\Sigma}^i$ の構造層の自由分解を与える.

E, F を複素線形空間, $V = \mathrm{Hom}(E, F), \dim E = n$ としグラスマン多様体 $P = \mathrm{Grass}(i, E) = \mathrm{Grass}(r, E^*)$, $r = n - i$, 上の $P \times E \to P$ が定める自明なベクトル束を $\mathcal{E}$，$P \times F \to P$ が定める自明なベクトル束を $\mathcal{F}$，$P \times V \to P$ が定める自明なベクトル束を ξ とする.

$$\begin{aligned}
Z &= \{(K, \phi) \in \mathrm{Grass}(i, E) \times V : \mathrm{Ker}\,\phi \supset K\} \\
&\cong \{(Q^*, \phi^*) \in \mathrm{Grass}(r, E^*) \times V^* : \mathrm{Im}\,\phi^* \subset Q^*\}
\end{aligned}$$

補題 11.1. Z は非特異多様体である．

第1の証明. $\mathrm{Grass}(i, E)$ の同語反復列を

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{E} \to \mathcal{Q} \to 0$$

で表し F のきめる自明束を $\mathcal{F}$ と書く．$\phi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ と E の i 次元部分空間 K に対し，$\Phi = \phi|_K$ で

$$\Phi : \mathrm{Grass}(i, E) \times \mathrm{Hom}(E, F) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{K}, \mathcal{F})$$

を定義する．これはベクトル束 $\mathrm{Hom}(\mathcal{K}, \mathcal{F})$ を $\mathrm{Grass}(i, E) \times \mathrm{Hom}(E, F)$ に引き戻して得られるベクトル束の断面と理解することにする．次に Φ と適当にベクトル束 $\mathrm{Hom}(\mathcal{K}, \mathcal{F})$ の局所自明化を固定した時にきまるこのベクトル束のファイバー成分への射影との合成 Ψ の微分を考える．

$$d\Psi : T_{(K,\phi)}(\mathrm{Grass}(i, E) \times \mathrm{Hom}(E, F)) \to T_{\Psi(K,\phi)} \mathrm{Hom}(\mathcal{K}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(K, F)$$

任意の $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Grass}(i, E), F)$ に対し $\varphi'|_K = \varphi$, $\varphi'|_{K^\perp} = 0$ なる $\varphi' \in \mathrm{Hom}(E, F)$ をとり，

$$c : (\mathbf{C}, 0) \to \mathrm{Grass}(i, E) \times \mathrm{Hom}(E, F), \quad t \mapsto (K, \phi + t\varphi')$$

で曲線 c を決めると $\frac{dc}{dt}(0)$ の像が φ なので $d\Psi$ は全射が示せた．$Z = \Psi^{-1}(0)$ なので Z は非特異がわかる． □

第2の証明. $P = \mathrm{Grass}(r, E^*)$ の同語反復列を

$$0 \to \mathcal{Q}^* \to \mathcal{E}^* \to \mathcal{K}^* \to 0$$

とすると

$$Z \cong \{(Q^*, \phi^*) \in \mathrm{Grass}(r, E^*) \times V^* : \mathrm{Im}\, \phi^* \subset Q^*\}$$

だから，自然な射影 $Z \to P$ のファイバーは P 上のベクトル束 $\zeta = \mathcal{Q}^* \otimes \mathcal{F}$ のファイバーと同一視される．よって Z はベクトル束 $\mathcal{Q}^*$ の全空間と同一視される． □

$\mathrm{Hom}(\mathcal{K}, \mathcal{Q})$ を $\mathrm{Grass}(i, E)$ の接空間と見なすと第1の証明より次の完全列の存在が判る．

$$0 \to TZ \to (\mathrm{Hom}(\mathcal{K}, \mathcal{Q}) \oplus T\,\mathrm{Hom}(E, F))|_Z \to \mathrm{Hom}(\mathcal{K}, \mathcal{F})|_Z \to 0.$$

$\mathrm{Hom}(\mathcal{K}, \mathcal{F})|_Z$ が $Z \subset \mathrm{Grass}(i, E) \times \mathrm{Hom}(E, F)$ の法束である．また第2の証明より

$$\mathcal{O}_Z = \mathrm{Sym}(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{F}^*)$$

もわかる．

$q : P \times V \to V$ を自然な射影とする．ここで $\Sigma = q(Z)$ とおくと $q : Z \to \Sigma$ は双有理写像でこれは Σ の特異点解消を与えることに注意しておく．

$$\mathcal{O}_{P\times V} = \mathrm{Sym}\, \xi^* = \mathrm{Sym}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}^*) \to \mathcal{O}_Z = \mathrm{Sym}\, \zeta^* = \mathrm{Sym}(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{F}^*)$$

なので $\mathrm{Sym}(\mathcal{Q}\otimes\mathcal{F}^*)$ を既約分解して

$$\mathcal{O}_Z=\mathrm{Sym}(\mathcal{Q}\otimes\mathcal{F}^*)=\bigoplus_{\lambda}\mathbb{S}_\lambda\mathcal{Q}\otimes\mathbb{S}_\lambda\mathcal{F}^*$$

と書いておく．すると Bott の定理より次を得る

$$H^k(Z,\mathcal{O}_Z)=H^k(P,\mathrm{Sym}(\mathcal{Q}\otimes\mathcal{F}^*))=\bigoplus_{\lambda}H^k(P,\mathbb{S}_\lambda\mathcal{Q})\otimes\mathbb{S}_\lambda F^*=\begin{cases}0, & (k>0),\\ q_*\mathcal{O}_Z, & (k=0).\end{cases}$$

よって 定理 9.1 より $\{F_\bullet\}$ は $q_*\mathcal{O}_Z$ の A-加群としての自由分解を与える．

$P=\mathrm{Grass}(r,E^*)$ 上の完全列 $0\to\zeta\to\xi\to\eta\to 0$ を考える．これは $0\to\mathcal{Q}^*\to\mathcal{E}^*\to\mathcal{K}^*\to 0$ に $\mathcal{F}$ をテンソル積して得られたものである．Z はベクトル束 ζ の全空間だったから Z の $P\times V$ での定義イデアルは $p^*\eta^*=p^*(\mathcal{K}\otimes\mathcal{F}^*)$ で生成される．

$$F_s=\bigoplus_{t\geq 0}H^t(P,\bigwedge^{s+t}\eta^*)\otimes A(-s-t)$$

とおく．$\bigwedge^{s+t}\eta^*=\bigwedge^{s+t}(\mathcal{K}\otimes\mathcal{F}^*)=\bigoplus_{\lambda:|\lambda|=s+t}\mathbb{S}_\lambda\mathcal{K}\otimes\mathbb{S}_{\lambda^\sim}\mathcal{F}^*$ なので次が成り立つ．

$$F_s=\bigoplus_{t\geq 0}\bigoplus_{\lambda:|\lambda|=s+t}H^t(P,\mathbb{S}_\lambda\mathcal{K})\otimes\mathbb{S}_{\lambda^\sim}F^*\otimes A(-s-t).$$

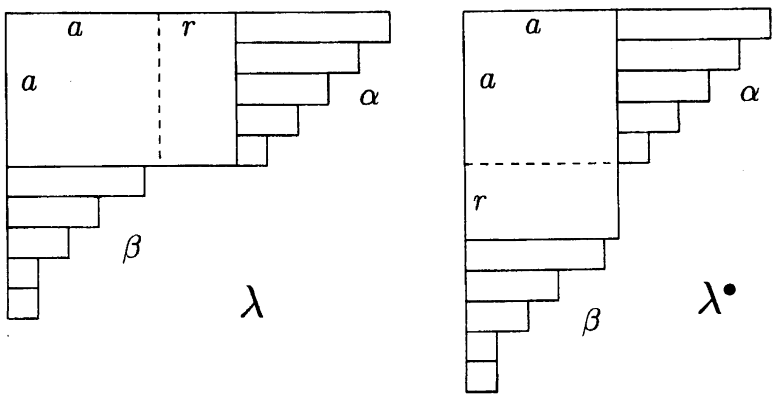
ここで $H^t(P,\mathbb{S}_\lambda\mathcal{K})$ を Bott の定理によって計算しよう．$\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_i)$ とする．$(0,\lambda)=(\overbrace{0,0,\dots,0}^{r},\lambda_1,\dots,\lambda_i)$ とおいて n-tuple $(0,\lambda)+(n,n-1,\dots,1)$ が同じ要素を持つなら $H^k(P,\mathbb{S}_\lambda\mathcal{K})$ 0. n-tuple $(0,\lambda)+(n,n-1,\dots,1)$ が同じ要素を持たない時

$$\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_a\geq r+a\geq a\geq\lambda_{a+1}\geq\cdots\geq\lambda_i\geq 0 \tag{2}$$

なる自然数 a をとれば $l(\sigma)=ra$ で

$$\lambda^\bullet:=\sigma^\bullet(0,\lambda)=(\lambda_1-r,\lambda_2-r,\dots,\lambda_a-r,\overbrace{a,a,\dots,a}^{r},\lambda_{a+1},\dots,\lambda_i)$$

なので (次図参照)



$$H^k(P, \mathbb{S}_\lambda \mathcal{K}) = \begin{cases} 0, & (k \neq ra), \\ \mathbb{S}_{\lambda^\bullet} E, & (k = ra) \end{cases}$$

となる．よって

$$F_s = \bigoplus_{a=0}^{i} \bigoplus_{\lambda:|\lambda|=s+ra} \mathbb{S}_{\lambda^\bullet} E \otimes \mathbb{S}_{\lambda^\sim} F^* \otimes A(-s-ra)$$

を得る．$a=0$ のとき 条件 (2) を満足するのは $\lambda = (0,\dots,0)$ の時のみなので $F_0 = A$ となる．また $a \geq 1$ のとき，λ が条件 (2) を満たすとすれば，$\alpha_b = \lambda_b - a - r$, $b = 1,\dots,a$, $\beta_b = \lambda_{a+b}$, $b = 1,\dots,i-a$, とおくと，$|\lambda| = a^2 + ra + |\alpha| + |\beta|$ となる．よって

$$F_s = \bigoplus_{a=1}^{q} \bigoplus_{\lambda} \left(\mathbb{S}_{\lambda^\bullet} E \otimes \mathbb{S}_{\lambda^\sim} F^* \otimes A(-s-ra) : s = |\alpha| + |\beta| + a^2\right), \quad s > 0$$

を得る．これが Lascoux 複体である．特に

$$F_1 = \bigwedge^{r+1} E \otimes \bigwedge^{r+1} F^* \otimes A(-r-1)$$

なので $\mathcal{O}_\Sigma = q_* \mathcal{O}_Z = \operatorname{Coker}\{F_1 \to F_0\}$ となり，これは generic matrix の $r+1$ 小行列式達の生成するイデアルの剰余環に同型となる．

ここで特に $r = n-1$ とすると Eagon-Northcott 複体を得る．このときは

$$F_s = \mathbb{S}_{s,1^{n-1}} E \otimes \bigwedge^{s+n-1} F^* \otimes A, \quad (s > 0)$$

となる．

$V = \operatorname{Hom}(E, F) \cong \operatorname{Hom}(F^*, E^*)$ だから，E を F^* に，F を E^* に，$n = \dim E$ を $p = \dim F^*$ に置き換えて，全く同様の構成をする事ができる．この場合は

$$\begin{aligned} Z =& \{(R^*, \phi^*) \in \operatorname{Grass}(p-r, F^*) \times V^* : \operatorname{Ker}\phi^* \supset R^*\} \\ =& \{(L, \phi) \in \operatorname{Grass}(r, F) \times V : \operatorname{Im}\phi \subset L\} \end{aligned}$$

とおく事になる．

12 対称行列の行列式イデアルの自由分解

E を n 次元複素線形空間，$V = \mathbb{S}_2 E$ とし，$\phi \in V = \mathbb{S}_2 E$ に対し，$\mathbb{S}_2 E \subset E \otimes E = \operatorname{Hom}(E, E^*)$ により対応する射 $\widehat{\phi} : E \to E^*$ を考えれば，$A = \operatorname{Sym}(\mathbb{S}_2 E^*)$ となる．$P = \operatorname{Grass}(i, E^*) = \operatorname{Grass}(r, E)$, $r = n - i$, を Grassman 多様体とする．P 上の同語反復列 を

$$0 \to K \to E \to Q \to 0$$

と書く．

$$\begin{aligned} Z =& \{(K, \phi) \in \operatorname{Grass}(i, E) \times V \mid \operatorname{Ker}\widehat{\phi} \supset K\} \\ \simeq& \{(Q^*, \phi^*) \in \operatorname{Grass}(r, E^*) \times V^* \mid \operatorname{Im}\widehat{\phi}^* \subset Q^*\} \end{aligned}$$

とおくと，Z はベクトル束 $\mathbb{S}_2\mathcal{Q}^* \to P$ の全空間となる．$\mathcal{O}_Z = \mathrm{Sym}(\mathbb{S}_2 Q)$ である．ここで $\mathcal{E}$ を自明束 $P \otimes V \to P$ として，次の完全列を考える．

$$0 \to \zeta = \mathbb{S}_2\mathcal{Q}^* \to \xi = \mathbb{S}_2\mathcal{E}^* \to \eta = \mathcal{E}^* \bigcirc \mathcal{K}^* \to 0$$

$X = \{\phi \in V = \mathbb{S}_2 E \mid \dim \mathrm{Ker}\,\widehat{\phi} \geq i\}$ とおくと次の図式がある．

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d] & \subset P \times V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & P \\ X & \subset V & \end{tikzcd}$$

$q|_Z : Z \to X$ は双有理写像となる．なぜなら $\phi \mapsto (\mathrm{Ker}\,\widehat{\phi}, \phi)$ が逆写像となるからである．

$$\begin{aligned} H^k(Z, \mathcal{O}_Z) &= H^k(P, p_*\mathcal{O}_Z) = H^k(P, \mathrm{Sym}(\mathbb{S}_2\mathcal{Q})) \\ &= H^k\left(P, \bigoplus_{m\geq 0} \mathbb{S}_m(\mathbb{S}_2\mathcal{Q})\right) = H^k\left(P, \bigoplus_{m\geq 0}\bigoplus_{\lambda\in E(2m)} \mathbb{S}_\lambda\mathcal{Q}\right) \\ &= \begin{cases} 0, & k > 0, \\ \bigoplus_{m\geq 0}\bigoplus_{\lambda\in E(2m)} \mathbb{S}_\lambda\mathcal{E} = A, & k = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

となる．最後に Bott の定理を使っている．よって X の正規化は有理特異点をもつ．

P 上の完全列 $0 \to \zeta \to \xi \to \eta \to 0$ に自由分解の幾何学的構成法を適用してみよう．

$$F_s = \bigoplus_{t\geq 0} H^t\left(P, \bigwedge^{s+t} \eta^*\right) \otimes A(-s-t)$$

とおく．ここで $\eta^* = \mathrm{Ker}\{\mathbb{S}_2\mathcal{E} \to \mathbb{S}_2\mathcal{Q}\} = \mathcal{K} \bigcirc \mathcal{E}$ に注意する．

定理 12.1. $F_\bullet$ は $\mathcal{O}_X$ の A 加群としての極小自由分解を与え，

$$H^k(P, \bigwedge^m \eta^*) = \begin{cases} 0 & r \nmid k \\ \bigoplus_{\lambda\in P_{2t,r-1}(2m)} \mathbb{S}_\lambda\mathcal{E} & k = tr \end{cases}$$

13 Morin のイデアル

反復ヤコビ行列の考えを用いて Morin のイデアル $\Delta^{i_1,\ldots,i_k}$ を定義しよう．まず $I = (1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_l \leq n)$ と $i = 1, \ldots, n$ に対し $i_s \leq i \leq i_{s+1}$ なる s をとって $I + i = (1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_s \leq i \leq i_{s+1} \leq \cdots \leq i_l \leq n)$ とおく．

$$D_i = \sum_{j=1}^{p}\sum_{I} Z^j_{I+i}\frac{\partial}{\partial Z^j_I}, \quad i = 1, \ldots, n$$

とおくと，Morin のイデアル $\Delta^{i_1,\dots,i_k}$ は次で定義される．まず，行列 M に対し M の r 次の小行列式で生成されるイデアルを $I_r(M)$ であらわす．Δ^{i_1} を次で定義する．

$$\Delta^{i_1} = I_{n-i_1+1}\begin{pmatrix} Z_1^1 & \cdots & Z_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ Z_1^p & \cdots & Z_n^p \end{pmatrix}.$$

$\Delta^{i_1,\dots,i_{k-1}}$ が定義されているとして，その生成元を $\varphi_1,\dots,\varphi_s$ とする．このとき

$$\Delta^{i_1,\dots,i_k} = \Delta^{i_1,\dots,i_{k-1}} + I_{n-i_k+1}\begin{pmatrix} Z_1^1 & \cdots & Z_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ Z_1^p & \cdots & Z_n^p \\ D_1\varphi_1 & \cdots & D_n\varphi_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1\varphi_s & \cdots & D_n\varphi_s \end{pmatrix}$$

で $\Delta^{i_1,\dots,i_k}$ を定める．

Morin のイデアルの表示は単純ではない．行列

$$\begin{pmatrix} Z_i^j \\ D_i Z_I^J \end{pmatrix},\ \#I = \#J = n - i_1 + 1$$

の $n - i_2 + 1$ 次小行列式は

$$\bigwedge^{n-i_2+1}\left(T^*\mathbf{C}^p \oplus \bigwedge^{n-i_1+1} T\mathbf{C}^n \otimes \bigwedge^{n-i_1+1} T^*\mathbf{C}^p\right) \otimes \bigwedge^{n-i_2+1} T\mathbf{C}^n$$

の生成元によって形式的には添字付ける事が出来るが，実際にはそれが生成元に対応しているとは限らないのである．

14 局所化原理

定理 14.1. $\Sigma^I(n-1,p-1)$ の特異点は $\Sigma^I(n,p)$ の特異点より良い．すなわち
- (i) $\Sigma^I(n,p)$ が Cohen-Macaulay ならば $\Sigma^I(n-1,p-1)$ も Cohen-Macaulay.
- (ii) $\Sigma^I(n,p)$ が有理特異点ならば $\Sigma^I(n-1,p-1)$ も有理特異点.
- (iii) $\Sigma^I(n,p)$ が正規特異点ならば $\Sigma^I(n-1,p-1)$ も正規特異点.

15 対称テンソルの階数条件: $\mathcal{O}_{\overline{\Sigma}^{i,i,\dots,i,j}}$ の Σ^i での自由分解

その jet が Σ^i に属するような写像については本質的に i 変数の場合に帰着するから最初から $i=n$ 変数の場合を考えても一般性を失わない．この節では $\Sigma^{i,\dots,i,j}$ の i の代りに n を用いる．

$$J^d = \bigoplus_{k=1}^{d} \mathrm{Hom}(\mathbb{S}_k T\mathbf{C}^n, T\mathbf{C}^p)$$

$$\Sigma^{\overbrace{n,\ldots,n}^{d-1}} = \overbrace{0\oplus\cdots\oplus 0}^{d-1}\oplus \mathrm{Hom}(\mathbb{S}_d T\mathbf{C}^n, T\mathbf{C}^p)$$

であるので $\Sigma^{\overbrace{n,\ldots,n}^{d-1},j}$ は

$$V = \mathrm{Hom}(\mathbb{S}_d T\mathbf{C}^n, T\mathbf{C}^p) = \mathrm{Sym}^d T^*\mathbf{C}^n \otimes T\mathbf{C}^p$$

の中にあると仮定してよい．このとき

$$A = \mathcal{O}_V = \mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}^d T\mathbf{C}^n \otimes T^*\mathbf{C}^p)$$

となる．$r = n - j$ とおき，

$$\Sigma = \Sigma^{\overbrace{n,\ldots,n}^{d-1},j} = \{\phi \in V : \exists Q^* \in \mathrm{Grass}(r, T^*\mathbf{C}^n) \text{ s.t. } \phi \in \mathbb{S}_d Q^* \otimes T\mathbf{C}^p\}$$

で Σ を定義する． 次に V の元 ϕ が標準的に決める写像

$$\widehat{\phi} : T\mathbf{C}^n \to \mathbb{S}_{d-1}T^*\mathbf{C}^n \otimes T\mathbf{C}^p, \quad \widehat{\phi}^* : \mathbb{S}_{d-1}T\mathbf{C}^n \otimes T^*\mathbf{C}^p \to T^*\mathbf{C}^n$$

を用いて Z を次で定義する．

$$\begin{aligned} Z =& \{(K,\phi) \in \mathrm{Grass}(j, T\mathbf{C}^n) \times V : \mathrm{Ker}\,\widehat{\phi} \supset K\} \\ =& \{(Q^*,\phi^*) \in \mathrm{Grass}(r, T^*\mathbf{C}^n) \times V^* : \mathrm{Im}\,\widehat{\phi}^* \subset Q^*\} \end{aligned}$$

$p : Z \to \mathrm{Grass}(r, T^*\mathbf{C}^n)$, $q : Z \to V$ を自然な射影とする．$P = \mathrm{Grass}(r, T^*\mathbf{C}^n) = \mathrm{Grass}(n - r, T\mathbf{C}^n)$ なる同一視の下に $\mathrm{Grass}(n-r, T\mathbf{C}^n)$ の同語反復列

$$0 \to \mathcal{K} \to p^*T\mathbf{C}^n \to \mathcal{Q} \to 0$$

を考える．$q(Z) = \Sigma$ で $q : Z \to \Sigma$ は双有理写像である事，Z は P 上のベクトル束 $\mathbb{S}_d\mathcal{Q}^* \otimes T\mathbf{C}^p$ の全空間である事に注意すれば，$q : Z \to \Sigma$ は Σ の特異点解消を与える事がわかる．さて $R^k q_* \mathcal{O}_Z = H^k(Z, \mathcal{O}_Z)$ を計算して見よう．

$$\begin{aligned} & H^k(Z,\mathcal{O}_Z) = H^k(P, p_*\mathcal{O}_Z) = H^k(P, \mathrm{Sym}(\mathbb{S}_d\mathcal{Q} \otimes T^*\mathbf{C}^p)) \\ &= H^k\left(P, \bigoplus_{m\geq 0} \mathbb{S}_m(\mathbb{S}_d\mathcal{Q} \otimes T^*\mathbf{C}^p)\right) = H^k\left(P, \bigoplus_{m\geq 0}\bigoplus_{\lambda:|\lambda|=m} \mathbb{S}_\lambda\mathbb{S}_d\mathcal{Q} \otimes \mathbb{S}_\lambda T^*\mathbf{C}^p\right) \\ &= H^k\left(P, \bigoplus_{m\geq 0}\bigoplus_{\lambda,\mu:|\lambda|=m,|\mu|=md} a^{\mu}_{\lambda,(d)}\mathbb{S}_\mu\mathcal{Q}\right) \otimes \mathbb{S}_\lambda T^*\mathbf{C}^p \\ &= \begin{cases} 0, & k > 0, \\ \bigoplus_{m\geq 0}\bigoplus_{\lambda,\mu:|\lambda|=m,|\mu|=md} a^{\mu}_{\lambda,(d)}\mathbb{S}_\mu T\mathbf{C}^n \otimes \mathbb{S}_\lambda T^*\mathbf{C}^p = \mathcal{O}_V, & k = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

となる．最後に Bott の定理を使っている．よって Σ の正規化は有理特異点をもつ．

ここで $\xi = (P \times V \to P)$, $\zeta = (Z \to P)$ とし P 上の完全列

$$0 \to \zeta \to \xi \to \eta \to 0$$

に自由分解の幾何学的構成法を適用してみよう．

$$F_s = \bigoplus_{t \geq 0} H^t\Big(P, \bigwedge^{s+t} \eta^*\Big) \otimes A(-s-t)$$

とおく．ここで η^* は次で与えられる．

$$\eta^* = \mathrm{Ker}\{p^*(\mathbb{S}_d T\mathbf{C}^n) \otimes T^*\mathbf{C}^p \to \mathbb{S}_d \mathcal{Q} \otimes T^*\mathbf{C}^p\} = \mathcal{K} \bigcirc \mathbb{S}_{d-1} T\mathbf{C}^n \otimes T^*\mathbf{C}^p$$

よって次の補題を認めれば証明は終る．

補題 15.1.

$$\mathrm{Im}\{F_1 \to F_0\} = \mathrm{Im}\left\{\bigwedge^{r+1} T\mathbf{C}^n \otimes \bigwedge^{r+1}(\mathbb{S}_{d-1} T\mathbf{C}^n \otimes T^*\mathbf{C}^p) \to A\right\}.$$

16 $\Sigma^{i,j}$ の Zariski 閉包の Cohen-Macaulay 性について

$\Sigma^{i,j}$ のザリスキ閉包の特異点解消を Ronga が論文 [7] で構成している．ここではこれを我々の立場から見直し，Cohen-Macaulay 性について検討してみよう．

$V = J^2 = J_1 \oplus J_2$ とおく．ここで

$$J_1 = \mathrm{Hom}(T\mathbf{C}^n, T\mathbf{C}^p) \cong T^*\mathbf{C}^n \otimes T\mathbf{C}^p$$
$$J_2 = \mathrm{Hom}(\mathbb{S}_2 T\mathbf{C}^n, T\mathbf{C}^p) \cong \mathbb{S}_2 T^*\mathbf{C}^n \otimes T\mathbf{C}^p$$

であった．J_1, J_2 の元 ϕ_1, ϕ_2 を右辺の元とみなした時それぞれ $[\phi_1]$, $[\phi_2]$ と書く事にする．

$$A = \mathcal{O}_V = \mathrm{Sym}(T\mathbf{C}^n \otimes T^*\mathbf{C}^p \oplus \mathbb{S}_2 T\mathbf{C}^n \otimes T^*\mathbf{C}^p)$$

に注意しておく．ここで

$$\Sigma^i = \{(\phi_1, \phi_2) \in V : \dim \mathrm{Ker}\, \phi_1 \geq i\}$$

で Σ^i を定義する．

$(\phi_1, \phi_2) \in \Sigma^i$ のとき $r = n - i$ とおけば，ϕ_1 の表現行列の階数は r で従って $\mathrm{Im}\, \phi_1$ の次元も r である．このとき $\phi_1 : T\mathbf{C}^n \to T\mathbf{C}^p$ が誘導する写像

$$\wedge^r \phi_1 : \bigwedge^r T\mathbf{C}^n \to \bigwedge^r T\mathbf{C}^p$$

を考える．これを $[\wedge^r\phi_1] \in \bigwedge^r T^*\mathbf{C}^n \otimes \bigwedge^r T\mathbf{C}^p$ とみなして，自然な写像

$$
\begin{aligned}
&\left(\bigwedge^r T^*\mathbf{C}^n \otimes \bigwedge^r T\mathbf{C}^p\right) \otimes (\mathrm{Sym}^2 T^*\mathbf{C}^n \otimes T\mathbf{C}^p) \\
\subset &\left(\bigwedge^r T^*\mathbf{C}^n \otimes \bigwedge^r T\mathbf{C}^p\right) \otimes (T^*\mathbf{C}^n \otimes T^*\mathbf{C}^n \otimes T\mathbf{C}^p) \\
= &\left(\bigwedge^r T^*\mathbf{C}^n \otimes T^*\mathbf{C}^n\right) \otimes \left(\bigwedge^r T\mathbf{C}^p \otimes T\mathbf{C}^p\right) \otimes T^*\mathbf{C}^n \\
\to &\left(\bigwedge^{r+1} T^*\mathbf{C}^n \otimes \bigwedge^{r+1} T\mathbf{C}^p\right) \otimes T^*\mathbf{C}^n
\end{aligned}
$$

による $[\wedge^r\phi_1] \otimes [\phi_2]$ の像を $[\psi_r]$ で表す．ここで最後の写像は自然な同型

$$
\left(\bigwedge^r W\right) \otimes W = \mathbb{S}_{2,1^{r-1}}W \oplus \bigwedge^{r+1} W, \quad W = T^*\mathbf{C}^n, \text{ または } T\mathbf{C}^p
$$

の第 2 成分への射影から決まるものである．$[\psi_r]$ が定義する写像

$$
\psi_r : T\mathbf{C}^n \to \bigwedge^{r+1} T^*\mathbf{C}^n \otimes \bigwedge^{r+1} T\mathbf{C}^p
$$

を考え $\theta_r = (\phi_1, \psi_r)$ で写像

$$
\theta_r : T\mathbf{C}^n \to T\mathbf{C}^p \oplus \bigwedge^{r+1} T^*\mathbf{C}^n \otimes \bigwedge^{r+1} T\mathbf{C}^p
$$

を定義しておく．$\Sigma^{i,j}$ を 条件 $\dim\mathrm{Ker}\,\phi_1 = i$, $\dim\mathrm{Ker}\,\theta_r \geq j$ の定める集合の Zariski 閉包とする．ここで $\mathrm{Flag}(i,j,T\mathbf{C}^n)$ を $(T\mathbf{C}^n \supset K_1 \supset K_2 : \dim K_1 = i,\ \dim K_2 = j)$ の定める旗多様体として $Q_s = T\mathbf{C}^n/K_s$, $s = 1,2$, とする．

$$
\begin{aligned}
Z_1 =&\{(K_1, K_2; \phi_1, \phi_2) \in \mathrm{Flag}(i,j,T\mathbf{C}^n) \times V : \mathrm{Ker}\,\phi_1 \supset K_1\} \\
=&\{(Q_2^*, Q_1^*; \phi_1^*, \phi_2^*) \in \mathrm{Flag}(n-j, n-i, T^*\mathbf{C}^n) \times V^* : \mathrm{Im}\,\phi_1^* \subset Q_1^*\}
\end{aligned}
$$

とおけば $Z_1 \to \mathrm{Flag}(i,j,T\mathbf{C}^n)$ はベクトル束とみなす事ができ対応するベクトル束は $\mathrm{Grass}(n-r, T^*\mathbf{C}^n)$ 上のベクトル束 $(\mathcal{Q}_1^* \oplus \mathbb{S}_2 T^*\mathbf{C}^n) \otimes T\mathbf{C}^p$ の引き戻しで得られる．特に Z_1 は非特異多様体である．Z_1 上 ϕ_1, ϕ_2 の制限として定義された写像

$$
\widehat{\phi}_1 : \mathcal{Q}_1 \to T\mathbf{C}^p, \quad \widehat{\phi}_2 : \mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2 \to T\mathbf{C}^p,
$$

を考え $\widehat{\theta} = \widehat{\phi}_1 + \widehat{\phi}_2$ で

$$
\widehat{\theta} : \mathcal{Q}_1 \oplus \mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2 \to T\mathbf{C}^p
$$

を定義する．

$$
\begin{aligned}
Z' =&\{(K_1, K_2; \phi_1, \phi_2) \in Z_1 : \dim\mathrm{Ker}\,\widehat{\theta} \geq i \bigcirc j\} \\
\cong&\{(K_1, K_2; \phi_1, \phi_2) \in Z_1 : \dim\mathrm{Im}\,\widehat{\theta} \leq r\}
\end{aligned}
$$

とおく．定義より Z' は $\mathrm{Flag}(i,j,F) \times V$ 上のバンドル写像 $\widehat{\theta} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{Q}_1 \oplus \mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2, T\mathbf{C}^p)$ の階数が r 以下の点として特徴づける事ができる．

定理 16.1 (Ronga). 自然な写像 $Z' \to V$ は $\Sigma^{i,j}$ への双有理正則写像となる．

ベクトル束 $\mathrm{Hom}(\mathcal{Q}_1 \oplus \mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2, T\mathbf{C}^p)$ の適当な局所自明化を固定して，このベクトル束のファイバー方向への射影を一つ固定して考える．$\widehat{\theta}$ とこのファイバー方向への射影との合成 Ψ の微分写像

$$d\Psi : TZ_1 \to T\,\mathrm{Hom}(\mathcal{Q}_1 \oplus \mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2, T\mathbf{C}^p) \to \mathrm{Hom}(Q_1 \oplus K_1 \bigcirc K_2, T\mathbf{C}^p)$$

を考える．これは全射である事が次のようにして証明される．$(K_1, K_2; \phi_1, \phi_2) \in Z_1$ を固定する．任意の $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{Hom}(Q_1 \oplus K_1 \bigcirc K_2, T\mathbf{C}^p)$ に対し $\varphi_1' \in \mathrm{Hom}(T\mathbf{C}^n, T\mathbf{C}^p)$ を $\varphi_1 = \varphi_1' \mod K_1$, $\varphi_1|_{K_1} = 0$ なるようにとると $\mathrm{Ker}(\phi_1 + t\varphi_1') \supset K_1$ となる．また $\varphi_2' \in \mathrm{Hom}(\mathbb{S}_2 T\mathbf{C}^n, T\mathbf{C}^p)$ を $\varphi_2 = \varphi_2'|_{K_1 \bigcirc K_2}$ なるようにとる．

$$c : (\mathbf{C}, 0) \to Z_1, \quad t \mapsto (K_1, K_2; \phi_1 + t\varphi_1', \phi_2 + t\varphi_2')$$

で曲線 c を定めるとベクトル $\frac{dc}{dt}(0)$ の像が (φ_1, φ_2) になる．

よって

$$\Psi : Z_1 \to \mathrm{Hom}(Q_1 \oplus K_1 \bigcirc K_2, T\mathbf{C}^p)$$

は submersion で $\Sigma^{i,j}$ は

$$\{\psi \in \mathrm{Hom}(Q_1 \oplus K_1 \bigcirc K_2, T\mathbf{C}^p) : \mathrm{rank}\,\psi \leq r\}$$

の Ψ による引き戻しである．よって

$$Z = \{(L; K_1, K_2; \phi_1, \phi_2) \in \mathrm{Grass}(r, T\mathbf{C}^p) \times Z_1 : \mathrm{Im}\,\widehat{\theta} \subset L\}$$

は Z' の (そして $\overline{\Sigma^{i,j}}$ の) 特異点解消になる．

従って $q_1 : \mathrm{Grass}(r, T\mathbf{C}^p) \times Z_1 \to Z_1$ によって $\mathcal{O}_Z$ の自由分解 (Koszul 複体) を崩壊させて得た $q_{1*}\mathcal{O}_Z$ の $\mathcal{O}_{Z_1}$-加群としての自由分解は Lascoux 複体でありその最初の項は次のように書かれる．

$$\cdots \to \bigwedge^{r+1}(\mathcal{Q}_1 \oplus \mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2) \otimes \bigwedge^{r+1} T\mathbf{C}^p \otimes \mathcal{O}_{Z_1} \to \mathcal{O}_{Z_1} \to 0$$

特に $i = n - p + 1$ $(r = p - 1)$ または $i = j = 1$ のときはこれは Eagon-Northcott 複体 である．

自然な写像 $\rho : \mathrm{Flag}(i, j, T\mathbf{C}^n) \times V \to \mathrm{Grass}(i, T\mathbf{C}^n) \times V$ によりこの 複体 を $\mathrm{Grass}(i, T\mathbf{C}^n) \times V$ 上の 複体 に崩壊させ，さらに V 上の複体に崩壊させる．まず次に注意する．

$Z_1 \to \mathrm{Grass}(i, T\mathbf{C}^n)$ は $(\mathcal{Q}_1^* \oplus \mathbb{S}_2 T^*\mathbf{C}^n) \otimes T\mathbf{C}^p$ の決めるベクトル束とみなせるので

$$\mathcal{O}_{Z_1} = \mathrm{Sym}((\mathcal{Q}_1 \oplus \mathbb{S}_2 T\mathbf{C}^n) \otimes T^*\mathbf{C}^p)$$

である．

以後は (Eagon-Northcott 複体を崩壊させれば良いので) $i = n - p + 1$ $(r = p - 1)$ または $i = j = 1$ の場合を考察する．

16.1 $i=n-p+1$ のとき

$i=n-p+1$ とする．このとき崩壊させる Eagon-Northcott 複体 は次のように書ける．

$$\mathfrak{F}_s = \begin{cases} \mathcal{O}_{Z_1}, & (s=0\text{ のとき}), \\ \mathbb{S}_{s,1^{p-1}}T^*\mathbf{C}^p \otimes \bigwedge^{s+p-1}(\mathcal{Q}_1 \oplus \mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2) \otimes \mathcal{O}_{Z_1}, & (s>0\text{ のとき}). \end{cases}$$

$\mathfrak{F}_s$ が 0 でないのは $0 \le s \le j(2n-2p-j+3)/2$ のときである事に注意しておく。射影公式より

$$R^k\rho_*\mathfrak{F}_0 = R^k\rho_*\mathcal{O}_{Z_1} = \begin{cases} 0, & k>0, \\ \mathrm{Sym}((\mathcal{Q}_1 \oplus \mathbb{S}_2T\mathbf{C}^n) \otimes T^*\mathbf{C}^p), & k=0. \end{cases}$$

再び射影公式より

$$R^k\rho_*\mathfrak{F}_s = \mathbb{S}_{s,1^{p-1}}T^*\mathbf{C}^p \otimes \left(\bigoplus_{a+b=s+p-1} \bigwedge^a \mathcal{Q}_1 \otimes R^k\rho_* \bigwedge^b(\mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2) \right) \otimes \mathcal{O}_{Z_1}.$$

補題 16.2. 次が成り立つ

$$R^k\rho_* \bigwedge^b(\mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2) = \begin{cases} 0, & ((i-j) \nmid k\text{ のとき}), \\ \bigoplus_{\lambda \in P_{2t,i-j-1}(2b)} \mathbb{S}_\lambda \mathcal{K}_1, & (k=t(i-j)\text{ のとき}). \end{cases}$$

証明. $\mathrm{Flag}(i,j;E)$ 上の完全列 $0 \to \mathcal{K}_2 \to \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_1/\mathcal{K}_2 \to 0$ より次の完全列を得る．

$$0 \to \mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2 \to \mathbb{S}_2\mathcal{K}_1 \to \mathbb{S}_2(\mathcal{K}_1/\mathcal{K}_2) \to 0.$$

高次直像層 $R^k\rho_*(\wedge^b(\mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2)) = H^k(\mathrm{Flag}(i,j,E), \wedge^b(\mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2)) \otimes A$ は，i 次対称行列の $i-j+1$ 次の小行列式の生成するイデアルの $b-k$ 次シチジーの $2b$ 次同次成分に表れる表現の直和である． □

これを用いて次を示す事ができる．

定理 16.3 (特殊化原理). (i) $\Sigma^{i,j}(n,p-1)$ に対する $Rq_*\mathfrak{F}_\bullet$ の項は $\Sigma^{i,j}(n,p)$ に対する $Rq_*\mathfrak{F}_\bullet$ の項から G に関する Schur 加群で $p-1$ 次元空間上消える項を零にすることにより得られる．

(ii) $\Sigma^{i-1,j}(n-1,p)$ に対する $Rq_*\mathfrak{F}_\bullet$ の項は $\Sigma^{i,j}(n,p)$ に対する $Rq_*\mathfrak{F}_\bullet$ の項から F に関する Schur 加群で $n-1$ 次元空間上消える項を零にすることにより得られる．

証明. 関連した複体の崩壊の各項を比較すれば良い．(i) の場合は $\Sigma^{i,j}(n,p-1)$ に対する $Rq_*\mathfrak{F}_\bullet$ の項は $\Sigma^{i,j}(n,p)$ に対する $Rq_*\mathfrak{F}_\bullet$ の項で次元の理由から消えるものを除外すれば得られる．(ii) の場合は，$\dim \mathcal{K}_1$ は 1 減るが，$\dim \mathcal{Q}_1$ は変わらないので，$\Sigma^{i-1,j}(n-1,p)$ に対する $Rq_*\mathfrak{F}_\bullet$ の項は $\Sigma^{i,j}(n,p)$ に対する $Rq_*\mathfrak{F}_\bullet$ の項で次元の理由から消えるものを除外すれば得られる． □

$\xi = (J_1 \times \mathrm{Grass}(i, T\mathbf{C}^n) \to \mathrm{Grass}(i, T\mathbf{C}^n))$, $\zeta = (Z_1 \to \mathrm{Grass}(i, T\mathbf{C}^n))$ として、自由分解の幾何学的構成法を完全列 $0 \to \zeta \to \xi \to \eta \to 0$ に適用しよう。$(\lambda|\mu) = \mathbb{S}_\lambda \mathcal{Q}_1 \otimes \mathbb{S}_\mu \mathcal{K}_1$ と書く。まず必要なコホモロジーの計算をしておこう。

補題 16.4. コホモロジー群 $H^k(1^a, 0^{p-1-a}|\lambda)$ が零でない場合は、次で与えられる。便宜上 $\lambda_0 = \lambda_1$ とおく.

- $\lambda_{j_0-1} \geq p + j_0 - 1$, $j_0 - 1 \geq \lambda_{j_0}$ なる j_0 が存在するとき、$k = (j_0 - 1)(p-1)$ として、

$$H^k = (\lambda_1 - p + 1, \dots, \lambda_{j_0-1} - p + 1, j_0^a, (j_0 - 1)^{p-1-a}, \lambda_{j_0}, \dots, \lambda_{n-p+1}).$$

- $\lambda_{j_0-1} \geq p+j_0-1$, $\lambda_{j_0} = p-a+j_0-1$, $j_0 \geq \lambda_{j_0+1}$ なる j_0 が存在するとき、$k = j_0(p-1)-a$ として、

$$H^k = (\lambda_1 - p + 1, \dots, \lambda_{j_0-1} - p + 1, j_0^p, \lambda_{j_0+1}, \dots, \lambda_{n-p+1}).$$

証明. Bott の定理による。$(1^a, 0^{p-1-a}|\lambda_1, \dots, \lambda_{n-p+1})$ に $(n, n-1, \dots, 1)$ を加えると

$$(n+1, n, \dots, n-a+2, n-a, n-a-1, \dots, n-p+2, \lambda_1+n-p+1, \lambda_2+n-p, \dots, \lambda_{n-p+1}+1)$$

なので、これが同じ要素を持たない条件は、$j = 1, \dots, n-p+1$ に対し

$$\lambda_j + n - p + 2 - j \begin{cases} \geq n+2, \\ = n-a+1, \\ \leq n-p+1 \end{cases}$$

となるので、書き換えて $j = 1, \dots, n-p+1$ に対し次のいずれかが成立。

$$\lambda_j \geq p + j, \quad \lambda_j = p - a + j - 1, \quad \lambda_j \leq j - 1$$

ある j_0 $(1 \leq j_0 \leq n-p+1)$ があって

$$\lambda_j \geq p + j \quad (j < j_0), \quad \lambda_j \leq j - 1 \quad (j \geq j_0)$$

となれば、最初の場合である. ある j_0 $(1 \leq j_0 \leq n-p+1)$ があって

$$\lambda_j \geq p + j \quad (j < j_0), \quad \lambda_{j_0} = p - a + j_0 - 1, \quad \lambda_j \leq j - 1 \quad (j > j_0)$$

となれば、2番目の場合である。 □

定理 16.5. $i = n - p + 1$ とする. このとき $R^k q_* \mathcal{O}_Z = 0, \forall k > 0$, となるのは次のいずれかと同値.

(i) $I = (i, 1)$, $i = 1, 2, 3, 4$, $p \geq 2$.
(ii) $I = (i, 2)$, $i = 2, 3$, $p \geq 2$.
(iii) $I = (i, 2)$, $i = 4, 5$, $p = 2, 3, 4$.
(iv) $p = 2$.

補題 16.2 より $R^k\rho_*\wedge^b(\mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2)$ の零でない項は $k=t(n-p-j+1)$ のときで、さらに $P_{2t,n-p-j}(2b)$ が空集合でないことが必要である。後者の条件より

$$t \geq 0, \quad 2t(2t+n-p-j) \leq 2b \leq j(2n-2p-j+3)$$

となる。これより次を得る。

$$0 \leq t \leq \frac{-(n-p-j)+\sqrt{(n-p+3j)^2-12j(j-1)}}{4}$$

零でない項を幾つかの場合に決定してみよう。$j=1$ のときは $t=0,1$ となり

$$R^0\rho_*\bigwedge^0(\mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2) = \mathbb{S}_0\mathcal{K}_1$$
$$R^{n-p}\rho_*\bigwedge^{n-p}(\mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2) = \mathbb{S}_{2^{n-p+1}}\mathcal{K}_1$$

のみが非零項である。$j \geq 2$ のときは $0 \leq t < j$ がわかる。$j=2$ とすると、

$$R^0\rho_*\bigwedge^0(\mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2) = \mathbb{S}_0\mathcal{K}_1$$
$$R^{n-p-1}\rho_*\bigwedge^b(\mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2) = \bigoplus_{\lambda \in P_{2,n-p-2}(2b)} \mathbb{S}_\lambda\mathcal{K}_1 \quad (\text{但し } n-p \leq b \leq 2(n-p)+1)$$

のみが非零項である。$j=3$ とすると

$$R^0\rho_*\bigwedge^0(\mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2) = \mathbb{S}_0\mathcal{K}_1$$
$$R^{n-p-2}\rho_*\bigwedge^b(\mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2) = \bigoplus_{\lambda \in P_{2,n-p-3}(2b)} \mathbb{S}_\lambda\mathcal{K}_1 \quad (\text{但し } n-p-1 \leq b \leq 3(n-p))$$
$$R^{2(n-p-2)}\rho_*\bigwedge^b(\mathcal{K}_1 \bigcirc \mathcal{K}_2) = \bigoplus_{\lambda \in P_{4,n-p-3}(2b)} \mathbb{S}_\lambda\mathcal{K}_1 \quad (\text{但し } 2(n-p+1) \leq b \leq 3(n-p))$$

のみが非零項である。

一般の場合は原論文に譲り以下 $j=1$ として $(n-p+1,1)$ の場合の計算を記述しよう。

前者の非零項を含む項は $R^0\rho_*\mathfrak{F}_0 = \mathcal{O}_{Z_1}$ でこれの崩壊は 1-jet のみで定まる Eagon-Northcott 複体である。

後者の非零項を含む項は

$$R^{n-p}\rho_*\mathfrak{F}_s = \mathbb{S}_{(s,1^{p-1})}T^*\mathbf{C}^p \otimes \bigwedge^{s-n+2p-2}\mathcal{Q}_1 \otimes \mathbb{S}_{(2^{n-p+1})}\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{O}_{Z_1}$$

で これが生き残るのは $\dim \mathcal{Q}_1 = p-1$ より $0 \leq s-n+2p-2 \leq p-1$ のときつまり

(3) $$\max\{1, n-2p+2\} \leq s \leq n-p+1$$

の時である．このとき計算すべき項は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{S}_{(s,1^{p-1})}T^*\mathbf{C}^p \otimes \bigwedge^{s-n+2p-2} \mathcal{Q}_1 \otimes \mathbb{S}_{(2^{n-p+1})}\mathcal{K}_1 \otimes \bigwedge^{m}(\mathcal{K}_1 \otimes T^*\mathbf{C}^p) \\
=&\mathbb{S}_{(s,1^{p-1})}T^*\mathbf{C}^p \otimes \bigwedge^{s-n+2p-2} \mathcal{Q}_1 \otimes \mathbb{S}_{(2^{n-p+1})}\mathcal{K}_1 \otimes \left(\bigoplus_{\lambda:|\lambda|=m} \mathbb{S}_\lambda \mathcal{K}_1 \otimes \mathbb{S}_{\lambda^\sim} T^*\mathbf{C}^p \right) \\
=& \bigoplus_{\lambda:|\lambda|=m} \mathbb{S}_{(s,1^{p-1})}T^*\mathbf{C}^p \otimes \mathbb{S}_{\lambda^\sim}T^*\mathbf{C}^p \otimes \bigwedge^{s-n+2p-2} \mathcal{Q}_1 \otimes \mathbb{S}_{(2^{n-p+1})}\mathcal{K}_1 \otimes \mathbb{S}_\lambda \mathcal{K}_1 \\
=& \bigoplus_{\lambda:|\lambda|=m,\ \lambda_1 \le p} \mathbb{S}_{(s,1^{p-1})}T^*\mathbf{C}^p \otimes \mathbb{S}_{\lambda^\sim}T^*\mathbf{C}^p \otimes \mathbb{S}_{(1^{s-n+2p-2})}\mathcal{Q}_1 \otimes \mathbb{S}_{(\lambda_1+2,\dots,\lambda_{n-p+1}+2)}\mathcal{K}_1
\end{aligned}
$$

これはホモロジーの次数 $m+s-n+p$ の項として現れている。

$\lambda_{j_0-1}+2 \ge p+j_0-1$, $j_0-1 \ge \lambda_{j_0}+2$ なる j_0 が存在するときは，

(A) $$p \ge \lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_{j_0-1} \ge p+j_0-3, \quad j_0-3 \ge \lambda_{j_0} \ge 0$$

をみたすので，$j_0=3$, $n-p \ge 1$ でなければならず，$\lambda=(p^2,0^{n-p-1})$ となり，崩壊して得られる複体に

$$(3^{s-n+2p}, 2^{2n-2p-s}; s+2, 3^{p-1})[s-n+p+2]$$

をなる項が現れる。[ ] 内はホモロジー次数である．この部分からの複体は次のようである．

$$
\begin{array}{c}
(3^{p+1}, 2^{n-p-1}; n-p+3, 3^{p-1})[3] \\
\downarrow \\
(3^{p}, 2^{n-p}; n-p+2, 3^{p-1})[2] \\
\downarrow \\
\vdots \\
\downarrow \\
(3^{1-n+2p}, 2^{2n-2p-1}; 3^{p})[3-n+p] \quad (n+1 \le 2p) \\
(3^{2}, 2^{n-2}; n-2p+4, 3^{p-1})[4-p] \quad (n+1 \ge 2p)
\end{array}
$$

$\lambda_{j_0-1}+2 \ge p+j_0-1$, $\lambda_{j_0}+2 = p-(s-n+2p-2)+j_0-1 = n-p-s+j_0+1$, $j_0 \ge \lambda_{j_0+1}+2$ なる j_0 が存在するときは、

$$p \ge \lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_{j_0-1} \ge p+j_0-3, \quad \lambda_{j_0} = n-p-s+j_0-1, \quad j_0-2 \ge \lambda_{j_0+1} \ge 0$$

をみたす．$j_0=2,3$ でなければならない．$j_0=2$ なるときは

(B_1) $$\lambda=(p, n-p-s+1, 0^{n-p-1}), \quad (p-1, n-p-s+1, 0^{n-p-1})$$

となり，崩壊させて得られる項は次のようである．

$$
\begin{array}{c}
(3, 2^{n-1}; (s, 1^{p-1}) \otimes (2^{n-p-s+1}, 1^{s-n+2p-1}))[s-n+p+1] \\
(2^{n}; (s, 1^{p-1}) \otimes (2^{n-p-s}, 1^{s-n+2p-2}))[s-n+p]
\end{array}
$$

この部分からの複体は次のようである．

$$
\begin{array}{ccc}
(3,2^{n-1};(n-p+1,1^{p-1})\otimes(1^p))[2] & \to & (2^n;(n-p+1,1^{p-1})\otimes(1^{p-1}))[1] \\
\downarrow & & \downarrow \\
(3,2^{n-1};(n-p,1^{p-1})\otimes(2,1^{p-1}))[1] & \to & (2^n;(n-p,1^{p-1})\otimes(2,1^{p-2}))[0] \\
\downarrow & & \downarrow \\
(3,2^{n-1};(n-p-1,1^{p-1})\otimes(2^2,1^{p-2}))[0] & \to & (2^n;(n-p-1,1^{p-1})\otimes(2^2,1^{p-3}))[-1] \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow \\
(3,2^{n-1};(1^p)\otimes(2^{n-p},1^{2p-n}))[2-n+p] & \to & (2^n;(1^p)\otimes(2^{n-p-1},1^{2p-n+1}))[1-n+p] \quad {\scriptstyle (n+1\le 2p)} \\
(3,2^{n-1};(n-2p+2,1^{p-1})\otimes(2^p))[3-p] & \to & (2^n;(n-2p+2,1^{p-1})\otimes(2^{p-1}))[2-p] \quad {\scriptstyle (n+1\ge 2p)}
\end{array}
$$

$n-p \geq 1$ のとき縦の列は，数多くキャンセルする．ただ $n-2p \geq 1$ の時は右下より $(2^n;n-2p+2,3^{p-1})[2-p]$ なる項が残る．

$j_0=3$ のときは $n-p\geq 2$ でなければならず，

$$(B_2) \qquad \lambda=(p,p,n-p-s+2,1^{j_1},0^{n-p-2-j_1}), \quad 0\leq j_1\leq n-p-2$$

となり

$$(3^{p+j_1+2},2^{n-p-j_1-2};(s,1^{p-1})\otimes(j_1+3,3^{n-p-s+1},2^{s+2p-n-2}))[s-n+p+j_1+3]$$

を含む項が現れる。まとめて表にしておくと次のようである．

$\otimes$	$\mathbb{S}_{3^n}T\mathbf{C}^n$	$\mathbb{S}_{3^{n-1},2}T\mathbf{C}^n$	$\cdots$	$\mathbb{S}_{3^{p+2},2^{n-p-2}}T\mathbf{C}^n$
$\mathbb{S}_{n-p+1,1^{p-1}}T^*\mathbf{C}^p$	$\mathbb{S}_{n-p+1,2^{p-1}}T^*\mathbf{C}^p[n-p+2]$	$\mathbb{S}_{n-p,2^{p-1}}T^*\mathbf{C}^p[n-p+1]$	$\cdots$	$\mathbb{S}_{3,2^{p-1}}T^*\mathbf{C}^p[4]$
$\mathbb{S}_{n-p,1^{p-1}}T^*\mathbf{C}^p$	$\mathbb{S}_{n-p+1,3,2^{p-2}}T^*\mathbf{C}^p[n-p+1]$	$\mathbb{S}_{n-p,3,2^{p-2}}T^*\mathbf{C}^p[n-p]$	$\cdots$	$\mathbb{S}_{3^2,2^{p-2}}T^*\mathbf{C}^p[3]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\mathbb{S}_{1^p}T^*\mathbf{C}^p$ $\mathbb{S}_{n-2p+1,1^{p-1}}T^*\mathbf{C}^p$	$\mathbb{S}_{n-p+1,3^{n-p},2^{2p-n-1}}T^*\mathbf{C}^p[2]$ $\mathbb{S}_{n-p+1,3^{p-1}}T^*\mathbf{C}^p[n-2p+3]$	$\mathbb{S}_{n-p,3^{n-p},2^{2p-n-1}}T^*\mathbf{C}^p[1]$ $\mathbb{S}_{n-p,3,2^{p-2}}T^*\mathbf{C}^p[n-2p+1]$	$\cdots$ $\cdots$	$\mathbb{S}_{3^{n-p+1},2^{2p-n-1}}T^*\mathbf{C}^p[n-p]$ $\mathbb{S}_{3^p}T^*\mathbf{C}^p[5-p]$

最後の行は $n+1\leq 2p$, $n+1\geq 2p$ の場合で分かれている．この場合も数多くキャンセルし，第一行から来る次の列が残る事もわかる．

$$(3^n;2(n-p+1),3^{p-1})[n-p+2]\to(3^{n-1},2;2(n-p)+1,3^{p-1})[n-p+1]\to\cdots\to(3^{p+2},2^{n-p-2};n-p+4,3^{p-1})[4]$$

$n-p\geq 2$ のときはまとめると $(2^n;n-2p+2,3^{p-1})[2-p]$ なる項を除けば次の項からなる

$$
\begin{array}{ccc}
(3^n; 2(n-p+1), 3^{p-1})[n-p+2] & \rightarrow & (1^n; n-p+1, 1^{p-1})[n-p+1] \\
\downarrow & & \downarrow \\
(3^{n-1}, 2; 2(n-p)+1, 3^{p-1})[n-p+1] & \rightarrow & (1^{n-1}; n-p, 1^{p-1})[n-p] \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow \\
(3^{p+2}, 2^{n-p-2}; n-p+4, 3^{p-1})[4] & \rightarrow & (1^{p+2}, 0^{n-p-2}; 3, 1^{p-1})[3] \\
\downarrow & & \downarrow \\
(3^{p+1}, 2^{n-p-1}; n-p+3, 3^{p-1})[3] & \rightarrow & (1^{p+1}, 0^{n-p-1}; 2, 1^{p-1})[2] \\
\downarrow & & \downarrow \\
(3^{p}, 2^{n-p}; n-p+2, 3^{p-1})[2] & \rightarrow & (1^{p}, 0^{n-p}; 1^{p})[1] \\
\downarrow & & \downarrow \\
(3^{p-1}, 2^{n-p+1}; n-p+1, 3^{p-1})[1] & \rightarrow & (0^n; 0^p)[0] \\
\downarrow & & \\
\vdots & & \\
\downarrow & & \\
(3^{1-n+2p}, 2^{2n-2p-1}; 3^p)[3-n+p] & & (n-p+1 \leq p) \\
(3^2, 2^{n-2}; n-2p+4, 3^{p-1})[4-p] & & (n-p+1 \geq p)
\end{array}
$$

$[1] \rightarrow [0]$ の横の写像の像は次の像になる事もわかる．

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S}_{3^{p-1},2^{n-p+1}} T\mathbf{C}^n \otimes \mathbb{S}_{n-p+1,3^{p-1}} T^*\mathbf{C}^p \rightarrow & \mathbb{S}_{3^{p-1}} T\mathbf{C}^n \otimes \mathbb{S}_{3^{p-1}} T^*\mathbf{C}^p \otimes \mathbb{S}_{2^{n-p+1}} T\mathbf{C}^n \otimes \mathbb{S}_{n-p+1} T^*\mathbf{C}^p \\
\rightarrow & \mathbb{S}_{3(p-1)}(T\mathbf{C}^n \otimes T^*\mathbf{C}^p) \otimes \mathbb{S}_{n-1}(\mathbb{S}_2 T\mathbf{C}^n \otimes T^*\mathbf{C}^p)
\end{aligned}
$$

$n-p=0$ のとき (3) より $s=1$ を得る．(A) は成立せず，(B_1) では $\lambda=(p-1),(p)$ のときのみが残り，ホモロジーの次数 1, 2 に項が表れる．結局崩壊させて得た複体は次のようである．

$$
\begin{array}{ccc}
(3, 2^{p-1}; 2^p) & \longrightarrow & (2^p; 2^{p-1}, 1) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
(1^p; 1^p) & \longrightarrow & (0^p; 0^p)
\end{array}
$$

$n-p=1$ のとき，(3) より $s=1,2$ を得る．(A) をみたすのは $\lambda=(p,p)$ である．これより次の項が表れる．

$$(3^{p+1}; 4, 3^{p-1})[3], \quad (3^p, 2; 3^p)[2]$$

(B_1) は $j_0=2$, $\lambda_{j_0}=\lambda_2=2-s$, $p+1-s \leq |\lambda| \leq 2p$ のときのみ成り立つ．すなわち $s=1$ のときは $\lambda=(p,1),(p-1,1)$, $s=2$ のときは $\lambda=(p,0),(p-1,0)$ のときのみが残る．これより次の項が表れる．

$$(3, 2^p; 3, 2^{p-1})[2],\ (2^{p+1}; (2, 1^{p-1}) \otimes (1^{p-1}))[1],\ (3, 2^p; 3, 2^{p-1})[1],\ (2^{p+1}; 3, 2^{p-1}, 1)[0]$$

$(2, 1^{p-1}) \otimes (1^{p-1}, 0) = (2^p) \oplus (3, 2^{p-2}, 1)$ より，

結局崩壊させて得た複体は (キャンセルする項を消して) 次のようである.

$$\begin{array}{ccccc}(3^{p+1};4,3^{p-1}) & \longrightarrow & (3^p,2;3^p) & \longrightarrow & (2^{p+1};2^p)\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ (1^{p+1};2,1^{p-1}) & \longrightarrow & (1^p,0;1^p) & \longrightarrow & (0^{p+1};0^p)\end{array}$$

16.2 $i=j=1$ のとき

$n \le p$, $(i,j)=(1,1)$ として Eagon-Northcott 複体 $\mathfrak{F}_0 = \mathcal{O}_{Z_1}$

$$\mathfrak{F}_s = \mathbb{S}_{s,1^{n-1}}(\mathcal{Q}\oplus\mathbb{S}_2\mathcal{K})\otimes\bigwedge^{s+n-1}T^*\mathbf{C}^p,\quad s=1,2,\cdots,p-n+1$$

の崩壊を考察する.

$$\mathfrak{F}_s = \bigoplus_{0\le a\le s-1}\mathbb{S}_{a+1,1^{n-2}}\mathcal{Q}\otimes\mathbb{S}_{2(s-a)}\mathcal{K}\otimes\bigwedge^{s+n-1}T^*\mathbf{C}^p$$

$\wedge^m(\mathcal{K}\otimes T^*\mathbf{C}^p)$, $m=1,\cdots,p$, をかけて Bott の定理を適用する.

$$(a+1,1^{n-2}|m+2s-2a;(1^{s+n-1})\otimes(1^m))[s+m]$$

の非零コホモロジー群 H^k は次のいずれか.

$$(a+1,m-n+2s-2a+2,2^{n-2};(1^{s+n-1})\otimes(1^m))[s+m-n+2]\qquad \frac{m-n+2s+1}{3}\le a\le\frac{m-n+2s}{2}$$

$$(m-n+2s-2a+3,a,2^{n-2};(1^{s+n-1})\otimes(1^m))[s+m-n+1]\quad a\le\frac{m-n+2s+3}{3}$$

これより次を得る.

定理 16.6. $R^k\rho_*\mathcal{O}_Z=0$, $k>0$, は $n\le 4$ と同値.

定理 16.7. $n=2$ ならば $\Sigma^{1,1}$ は正規有理特異点である.

16.3 変形された Morin のイデアル

写像 $\theta_{p-1}: T\mathbf{C}^n \to T\mathbf{C}^p \oplus \wedge^p T^*\mathbf{C}^n \otimes \wedge^p T\mathbf{C}^p$ のランクの条件を $\mathrm{Grass}(p-1,T^*\mathbf{C}^n)$ の点 Q^* で考える. $Q^*\in\mathrm{Grass}(p-1,T^*\mathbf{C}^n)$ を $dx_1,\ldots,dx_{p-1}$ で生成されているとすると $Z_i^j=0$, $i=p,\ldots,n$, なる条件の元で θ_{n-i_1} の表現行列の階数条件を考える事になる. この行列は

$$\begin{pmatrix} Z_1^1 & \cdots & Z_{p-1}^1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ Z_1^p & \cdots & Z_{p-1}^p & 0 & \cdots & 0\\ * & \cdots & * & u_{p,1} & \cdots & u_{n,1}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ * & \cdots & * & u_{p,*} & \cdots & u_{n,*}\end{pmatrix}$$

のようになるがこの右下の行列の階数条件を考える．$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{p-1} \wedge dx_k$, $k = p, \ldots, n$ に対応する行のみが零でなく，それらは次のように表される．

$$\begin{vmatrix} Z_1^1 & \ldots & Z_{p-1}^1 & Z_{k,l}^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ Z_1^p & \ldots & Z_{p-1}^p & Z_{k,l}^p \end{vmatrix}, \quad p \le k, l \le n$$

これの作る行列の階数条件を考察しよう．そのため $B = \mathrm{Sym}(\mathcal{Q} \otimes T^*\mathbf{C}^p \oplus \mathbb{S}_2\mathcal{K} \otimes T^*\mathbf{C}^p)$ としてこの行列の $t \times t$ 小行列式の生成する環 B のイデアルを I_t とする．この行列の要素は次の写像の像としてあらわせる．

$$\bigwedge^p T^*\mathbf{C}^p \otimes \bigwedge^{p-1} \mathcal{Q} \otimes \mathbb{S}_2\mathcal{K} \to B$$

よって I_{n-p} のシチジーは次のように表せる．

$$((n-p+1)^{p-1}|2^{n-p+1}; (n-p+1)^p) \to (0^{p-1}|0^{n-p+1}, 0^p)$$

定理 16.8. この複体の崩壊は負の項はなく零次の項は A で，これは次のイデアルのシチジーである．

$n-p$	イデアル	シチジーの長さ
0	$\Delta^{1,1}$	2
≥ 1	$\Delta^{n-p+1} + J$	$(n-p)^2$ $(n-p \le p)$
		$p(n-p+1)+1$ $(n-p > p)$

ただし $J = \mathrm{Im}\{\mathbb{S}_{(n-p+1)^{p-1}, 2^{n-p+1}} T\mathbf{C}^n \otimes \mathbb{S}_{(n-p+1)^p} T^*\mathbf{C}^p \to \mathbb{S}_{(n-p+1)(p-1)} J_1^* \otimes \mathbb{S}_{n-p+1} J_2^*\}$ である．また $\Delta^{n-p+1,1} = \Delta^{n-p+1} + J\Delta^{n-p+2}$ もわかる．

証明. Bott の定理により I_{n-p} のシチジーを崩壊させればよい．$m = 1, \ldots, p(n-p+1)$ とする．

$$\begin{aligned} &((n-p+1)^{p-1}|2^{n-p+1}; (n-p+1)^p) \otimes \bigwedge^m (\mathcal{K} \otimes T^*\mathbf{C}^p) \\ = &\bigoplus_{\lambda : |\lambda| = m, \lambda_1 \le p} ((n-p+1)^{p-1}|\lambda_1 + 2, \ldots, \lambda_{n-p+1} + 2; (n-p+1)^p \otimes \lambda^\sim) \end{aligned}$$

これの非零コホモロジー H^k を計算すればよい．
$n-p=0$ のときは $\lambda = (p), (p-1)$ のときのみで，そのとき $k = p-1$ である．表れる項は次のようである．

$$(3, 2^{p-1}; 2^p)[2], \quad (2^p; 2^{p-1}, 1)[1]$$

$n - p \ge 1$ のときは $\lambda_1 < n-p$ のときで，そのとき $k = 0$ である．表れる項は次のようである．

$$((n-p+1)^{p-1}, \lambda_1 + 2, \ldots, \lambda_{n-p+1} + 2; (n-p+1)^p \otimes \lambda^\sim)[m+1], \quad |\lambda| = m$$

$\lambda_1 \le \min\{p, n-p-1\}$ より，シチジーの長さは $\min\{p, n-p-1\}(n-p+1)+1$ である．□

定理 16.9. I_{n-p-1} のシチジーは次のように表せる.

$$\begin{array}{ccc}
((n-p+1)^{p-1}|3^2, 2^{n-p-1}; n-p+2, (n-p+1)^{p-1}) & \rightarrow & ((n-p+1)^{p-1}|3, 2^{n-p-1}, 1; (n-p)^p) \\
\downarrow & & \downarrow \\
((n-p+1)^{p-2}, n-p|3^2, 2^{n-p-1}; (n-p+1)^p) & \rightarrow & ((n-p)^{p-1}|2^{n-p}, 0; (n-p)^p) \\
 & & \downarrow \\
 & & (0^{p-1}|0^{n-p+1}; 0^p)
\end{array}$$

これを崩壊させると，負の項はなく零次の項は A で，これはイデアル $\Delta^{2,2}$, $\Delta^{n-p+1} + J$ のシチジーである.

$n-p$	イデアルまたは J	シチジーの長さ
1	$\Delta^{2,2}$	5
2	$\mathbb{S}_{2^{n-1}}T\mathbf{C}^n \otimes \mathbb{S}_{2^p}T\mathbf{C}^p$	8
≥ 3	$\mathbb{S}_{(n-p)^{p-1},2^{n-p}}T\mathbf{C}^n \otimes \mathbb{S}_{(n-p)^p}T^*\mathbf{C}^p$	$(n-p)^2+1$ $(n-p \leq p)$ $p(n-p+1)+3$ $(n-p > p)$

参考文献

[1] W. Fulton, Intesection Theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge Band 2, Springer-Verlag, 1984.

[2] T. Fukui and J. Weyman, Cohen-Macaulay properties of Thom-Boardman strata. I: Morin's ideal, Proc. London Math. Soc. (3) **80** (2000), 257–303, II: The defining ideal of $\Sigma^{i,j}$, to appear in Proc. London Math. Soc..

[3] W. Fulton and J. Harris, Representation Theory, A First Course, Graduate Texts in Mathematics **129**, Springer-Verlag, 1991.

[4] W. Fulton, Young Tableaux, London Mathematical Society Student Texts **35**, Cambridge University Press, 1997.

[5] I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, Second Edition, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, 1995.

[6] B. Morin, Calcul jacobien, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatriéme Série **8** (1975), 1–98.

[7] F. Ronga, Le calcul des classes duales aux singularité de Boardman d'ordre deux, Commentarii Mathematici Helvetici **47** (1972), 15–35.

[8] J. Weyman, Cohomology of Vector Bundles and Syzygies, Cambridge Tracts in Mathematics **149**, Cambridge University Press, 2003

Cohen-Macaulay property of Thom-Boardman strata

TOSHIZUMI FUKUI

I am going to report about what we can show about Cohen-Macaulay property of the varieties supported by Thom-Boardman strata applying the geometric technique of calculating syzygies, which is a joint work with Jerzy Weyman.

The problem is motivated by asking a generalization to a map-germ of the following theorem:

Theorem (Milnor). Let $f : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ be a holomorphic function germ with isolated singularity. Then the number of Morse singularities appeared in a small perturbation of f near the origan is $\mu(f)$ where $\mu(f)$ is the Milnor number of f and defined by

$$\mu(f) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\} \Big/ \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle.$$

Let $f : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^p, 0)$ be a holomorphic map germ, and let $f_u : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^p, 0)$ be a generic approximation to f. Then our problem is asking a method to describing the singularities of a generic approximation f_u in terms of f.

Let us repeat the proof of Milnor's Theorem, since it is instructive. We consider the 1-jet space:

$$J^1(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n, y, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbf{C}^{2n+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} g : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0), \\ y = g(x),\ p_i = \partial g / \partial x_i \end{array} \right\}$$

Then we have a map called 1-jet section of f:

$$j^1 f : \mathbf{C}^n \to J^1(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}), \quad x \mapsto \left(x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)$$

Setting $\Sigma = \{p_i = 0\} \subset J^1(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$, we have

$$\begin{aligned}
&\# \text{ of singularities of } f_u \text{ near } 0 \\
= \;& \# \text{ of } (j^1 f_u)^{-1}(\Sigma) \text{ near } 0 \\
= \;& \#(j^1 f_u(\mathbf{C}^n) \cap \Sigma) \text{ near } j^1 f(0) \\
= \;& \text{local intersection } \# \text{ of } j^1 f(\mathbf{C}^n) \text{ and } \Sigma \text{ at } j^1 f(0) \\
= \;& \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{x_i, y, p_i\} / \mathcal{I}_\Sigma + \mathcal{I}_{j^1(\mathbf{C}^n)} \\
= \;& \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{x_i, y, p_i\} \Big/ \langle p_i \rangle + \left\langle y - f(x),\ p_i - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle \\
= \;& \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{x_i\} \Big/ \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle.
\end{aligned}$$

This proof suggests us that one way to approach to our problem is to consider the intersection theory of the image of jet section with the closure of orbits of map-germs in jet

We proceed to the next simplest case: $(n,p) = (2,2)$. We first remark that a generic map-germ $(\mathbf{C}^2,0) \to (\mathbf{C}^2,0)$ is equivalent to one of the following germs:

$(x,y) \mapsto (x,y)$	regular point
$(x,y) \mapsto (x^2,y)$	fold (A_1, Σ^1)
$(x,y) \mapsto (x^3+xy,y)$	cusp (A_2, $\Sigma^{1,1}$)

Let $\Sigma^1(f)$ denote the fold locus of $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$. Then if f is generic, the cusps are just the critical points of $f|\Sigma^1(f)$. Here, Σ^1 and $\Sigma^{1,1}$ are notations for Thom-Boardman singularities.

Theorem (Fukuda-Ishikawa, Gaffney-Mond). Let $f = (f_1, f_2) : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ be a holomorphic map-germ and f_u a generic approximation of f. We set

$$c(f) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{x_1,x_2\} \Big/ \left\langle J, \frac{\partial(f_1,J)}{\partial(x_1,x_2)}, \frac{\partial(f_2,J)}{\partial(x_1,x_2)} \right\rangle, \text{ where } J = \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)}.$$

The ideal appeared in the definition of $c(f)$ describes the ideal on 2-jet space $J^2(\mathbf{C}^2, \mathbf{C}^2)$ supported by the Zariski closure of Thom-Boardman strata $\Sigma^{1,1}$. The proof can be done by the same idea as Theorem 1.1, but we need some knowledge of commutative algebra, since this has singularities.

Theorem. Let I be an ideal of $A = \mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_m\}$. We set $\Sigma = V(I)$, and $k = \operatorname{cod}\Sigma$. Let $(g_1, \ldots, g_k)$ be a system of parameters for A/I. and set $Y = V(g_1, \ldots, g_k)$. For Y_u a deformation of Y, we have

$$\#(Y_u \cap \Sigma \text{ near } 0) \leq \dim_{\mathbf{C}} A/I + (g_1, \ldots, g_k)$$

and equality holds if and only if I is perfect (i.e. A/I is Cohen-Macaulay).

We thus need to show the corresponding ideal on $J^2(\mathbf{C}^2, \mathbf{C}^2)$ is perfect, and this follows from the fact that the determinantal variety is Cohen-Macaulay.

Suggested by the ideal appeared in the definition of $c(f)$, we expect that the ideal described by taking such jacobean repeatedly define varieties which is related to Thom-Boardman strata $\Sigma^{i_1,\ldots,i_k}$. B. Morin analyzed such ideals $\Delta^{i_1,\ldots,i_k}$ and he shows that this defines nonsingular variety along $\Sigma^{i_1,\ldots,i_k}$.

We describe the Morin's ideal in an explicit form: Let $x = (x_1, \ldots, x_n)$ denote a coordinate system on $U \subset \mathbf{C}^n$, and $y = (y_1, \ldots, y_p)$ a coordinate system on $V \subset \mathbf{C}^p$. Then we define the coordinate functions X_i, Y_j, Z^j_σ on $J = J^k(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^p)$, where $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ an m-tuple of non-decreasing positive integers with $1 \leq m \leq r$, by

$$X_i = x_i \circ \pi_n, \; Y_j = y_j \circ \pi_p, \; Z^j_\sigma(j^r f(p)) = \frac{\partial^{|\sigma|}(y_j \circ f)}{\partial x_{\sigma_1} \cdots \partial x_{\sigma_m}}(p),$$

where f is the germ at p of any map from U to V and $|\sigma| = m$. We understand $Y_j = Z^j = Z^j_\emptyset$. We define an $(m+1)$-tuple $\sigma(i)$ and vector fields D_i $(1 \leq i \leq n)$ by

$$Z^j_{\sigma(i)}(j^r f(p)) = \frac{\partial^{|\sigma|+1}(y_j \circ f)}{\partial x_i \partial x_{\sigma_1} \cdots \partial x_{\sigma_m}}(p), \quad D_i = \frac{\partial}{\partial X_i} + \sum_{\sigma : |\sigma| < r} \left(\sum_{j=1}^{p} Z^j_{\sigma(i)} \frac{\partial}{\partial Z^j_\sigma} \right).$$

Let Δ^{i_1} denote the ideal generated by subdeterminants of order $n - i_1 + 1$ of the matrix ${}^t(D_i Y_j)$. We define Δ^I for $I = (i_1, \ldots, i_k)$ inductively: Δ^I is the ideal generated by $\Delta^{i_1,\ldots,i_{k-1}}$ and subdeterminants of order $n - i_k + 1$ of the matrix ${}^t(D_i Y_j, D_i g_s)$ where $g = (g_1, \ldots, g_t)$ is a system of generators of $\Delta^{i_1,\ldots,i_{k-1}}$.

We are interested in when these ideals are perfect.

Theorem. The Morin's ideal Δ^I, $I = (i_1, \dots, i_k)$, $n \geq i_1 \geq \cdots \geq i_k > 0$, is perfect in the following cases:

- $I = (i)$,
- $I = (1, 1)$, $n = p$,
- $I = (2, 2)$, $n - p = 1$.

The first two cases are determinantal and not new from the view point of commutative algebra.

Theorem. The Morin's ideal Δ^I, $I = (i_1, \dots, i_k)$, $n \geq i_1 \geq \cdots \geq i_k > 0$, is perfect along Σ^{i_1} if and only if

- $I = (i, \dots, i, j)$,
- $I = (n - p + 1, 1, 1)$, $n - p \geq 1$,
- $I = (n - p + 1, 1, 1, 1)$, $n - p \geq 1$,
- $I = (2, 2, 1, 1)$, $n - p = 1$.

When $i_1 = n - p + 1$, maps of type Σ^I are essentially unfoldings of functions in $n - p + 1$ variables. When $I = (n - p + 1, j)$, it is easy to see that Δ^I is essentially the ideal generated by $(n - j + 1)$-minors of a symmetric matrix of order $n - p + 1$ which corresponds to the second partial derivatives of the function. When $I = (n - p + 1, 1, 1, 1)$, a long computation shows that this is essentially the ideal generated by $(n - p + 1)$-minors of some symmetric matrix of order $n - p + 2$.

The idea to show perfectness of such ideals is to try to adapt the best proof for perfectness of the determinantal ideal to each case. In my understanding, the best proof for perfectness is geometric technique of calculating syzygies. The syzygy of determinantal ideal is obtained by pushing down the syzygy (Koszul complex) of the desingularization of the determinantal variety which is realized as the total space of a homogeneous vector bundle of the Grassmannian manifold. This method can generalize for a homogeneous vector bundle of a homogeneous space. Moreover, we can generalize this by pushing down other complexes.

This also suggests that we can get some information pushing down the syzygy of the desingularization of closure of Thom-Boardman strata when it is explicitly known. F. Ronga constructed a desingularization of the Zariski closure of $\Sigma^{i,j}$. Pushing down syzygies associated with his desingularization, we obtain the following:

Theorem. We assume that $i = n - p + 1$. The Zariski closure of $\Sigma^{i,j}$ is rational (which implies that $\rho_* \mathcal{O}_Z$ is a Cohen-Macaulay module) iff one of the following holds.

- $j = 1$: $i = 1, 2, 3, 4$, $p \geq 2$.
- $j = 2$: $i = 2, 3$, $p \geq 2$ or $i = 4, 5$, $p = 2, 3, 4$.
- $p = 2$

When $n - p = 1$, we remark that $\Delta^{2,2}$ is not reduced and $V(\Delta^{2,2})$ is Cohen-Macaulay. The theorem means the normailzation of $V(\Delta^{2,2})$ is also Cohen-Macaulay.

Theorem. We consider the case $(i, j) = (1, 1)$.

- The Zariski closure of $\Sigma^{1,1}$ is normal and Cohen-Macaulay along Σ^2.
- The normalization of the Zariski closure of $\Sigma^{1,1}$ is Cohen-Macaulay along Σ^4.
- The normalization of the Zariski closure of $\Sigma^{1,1}$ is Cohen-Macaulay if $p \leq n + 1$.

Finally we describe a consequence for map germs $f = (f_1, f_2) : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ for $n = 3, 4$. Let $\mathfrak{S}_k$ denote the symmetric group of order k.

We first remark that a generic map-germ $(\mathbf{C}^3, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ is equivalent to one of the following germs:

$(x, y, z) \mapsto (x, y)$	regular point
$(x, y, z) \mapsto (x^2 + z^2, y)$	fold (A_1, Σ^2)
$(x, y, z) \mapsto (x^3 + xy + z^2, y)$	cusp (A_2, $\Sigma^{2,1}$)

For a map germ $f : (\mathbf{C}^3, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$, we define $c(f)$ by

$$c(f) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{x_1, x_2, x_3\} \Big/ I_2 \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} + (U)$$

where $U = \sum_{1 \leq j_1, j_2, j_3, j_4 \leq 2,\ \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_3} (-1)^{j_1 + j_2} \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\tau) \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{\sigma(1)}} \frac{\partial f_{j_2}}{\partial x_{\tau(1)}} \frac{\partial^2 f_{j_3}}{\partial x_{\sigma(2)} \partial x_{\tau(2)}} \frac{\partial^2 f_{j_4}}{\partial x_{\sigma(3)} \partial x_{\tau(3)}}$.

Theorem. Let $f : (\mathbf{C}^3, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ be a holomorphic map germ. If $c(f)$ is finite, then $c(f)$ is the number of cusps appeared in a generic approximation of f near 0.

We next remark that a generic map-germ $(\mathbf{C}^4, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ is equivalent to one of the following germs:

$(x, y, z, w) \mapsto (x, y)$	regular point
$(x, y, z, w) \mapsto (x^2 + z^2 + w^2, y)$	fold (A_1, Σ^3)
$(x, y, z, w) \mapsto (x^3 + xy + z^2 + w^2, y)$	cusp (A_2, $\Sigma^{3,1}$)

For a map germ $f : (\mathbf{C}^4, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$, we define $c(f)$ by

$$c(f) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \Big/ I_2 \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \end{pmatrix} + (U_1, U_2, U_3, U_4)$$

where

$$U_k = \sum_{\substack{1 \leq j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6 \leq 2 \\ \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_4}} (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\tau) \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_k} \frac{\partial f_{j_2}}{\partial x_{\sigma(1)}} \frac{\partial f_{j_3}}{\partial x_{\tau(1)}} \frac{\partial^2 f_{j_4}}{\partial x_{\sigma(2)} \partial x_{\tau(2)}} \frac{\partial^2 f_{j_5}}{\partial x_{\sigma(3)} \partial x_{\tau(3)}} \frac{\partial^2 f_{j_6}}{\partial x_{\sigma(4)} \partial x_{\tau(4)}},$$

$k = 1, \ldots, 4$.

Theorem. Let $f : (\mathbf{C}^4, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ be a holomorphic map germ. If $c(f)$ is finite, then $c(f)$ is the number of cusps appeared in a generic approximation of f near 0.

In the next article, we continue more explanation (in Japanese) about this topic.